Seriál – Teorie her I

Počínaje 17. ročníkem probíhá každý rok v PraSátku seriál na pokračování. Jde o výklad nějakého odvětví matematiky, se kterým se na střední škole s velkou pravděpodobností setkáš jen v omezené míře či vůbec ne, ale které je přesto možné vyložit tak, aby bylo středoškolákům přístupné. Cílem seriálu je tedy rozšířit Tvé matematické obzory o nějaký zajímavý kout matematiky. Letošní seriál na téma *Teorie her* pro Tebe píše Alča Skálová. Ve druhých, třetích a čtvrtých komentářích vyjde vždy jeden díl a k němu trojice úloh, k jejichž vyřešení by Ti měly stačit znalosti nabyté přečtením a plným pochopením doposud vydaných dílů. Na rozdíl od ostatních sérií se Ti z této do výsledného bodového hodnocení započítají všechny (tři) příklady.

Úvod

Teorie her se zabývá rozhodováním v konfliktních situacích. To jsou takové situace, ve kterých výsledek nezávisí jenom na tom, jak se zachováme my, ale i na tom, jak se zachovají ostatní účastníci (hráči). Dobrým příkladem je hra kámen-nůžky-papír. Teorie her se ovšem umí vypořádat i se složitějšími situacemi, například:

(i) Kolik mám jakožto investor nabídnout, abych zakázku získal a přitom vydělal co nejvíce?
(ii) Kterou cestou jet do práce, abych se vyhnul dopravní zácpě (zde jsou hráči všichni řidiči, kteří ráno potřebují jet stejnou cestou)?
(iii) Pojistit si dům proti živelným katastrofám, či nepojistit („proti“hráčem je příroda)?

Znalost teorie her zkrátka najde uplatnění v mnoha oblastech – od abstraktní matematiky, přes biologii, dopravní situace, sport, politiku, až po ekonomii.[1] Samozřejmě čím složitější situace, tím složitější model, a většinou ruku v ruce s tím i pokročilejší matematika potřebná k jeho vyřešení.

My začneme zlehka – hraním kombinatorických her – a uvidíme, kam až se v průběhu roku stihneme dostat.

[1] Jedni z mála matematiků, kteří získali Nobelovu cenu, ji dostali právě za ekonomii. Byli jimi John Forbes Nash, Reinhard Selten a John Charles Harsanyi v roce 1994.

Kombinatorická teorie her

Co je to kombinatorická hra

V tomto dílu seriálu se budeme zabývat pouze *kombinatorickými hrami*, což jsou hry splňující následující podmínky:

(1) Hrají dva *hráči* proti sobě.
(2) Hráči se pravidelně střídají. Není-li uvedeno jinak, hráč nesmí vynechat tah.
(3) Je dáno (zpravidla konečně mnoho) *pozic*, ve kterých se hra může nacházet. Jedna z pozic je označena jako *startovní*. Pozicím, ve kterých hra končí – *výhrou* jednoho z hráčů a *prohrou* druhého, nebo *remízou* – se říká *koncové*.
(4) Pravidla hry určují pro každého hráče všechny přípustné *tahy* z každé pozice.
(5) Ve hře nejsou žádné náhodné prvky.
(6) Oba hráči mají *úplnou informaci*.
(7) Oba hráči jsou *racionální*.

Předně se podívejme, co znamenají poslední tři body. Bod (5) vylučuje jakýkoliv zásah náhody; žádné házení kostkou nebo tahání sirek. Jak se hráč ve svém tahu zachová, záleží čistě na jeho vůli, a tedy výsledek hry je ovlivněn pouze schopnostmi obou hráčů. Bod (6) říká, že veškeré informace ve hře jsou dostupné oběma hráčům. Tedy například kanasta není hra s úplnou informací, neboť neznáme karty svého soupeře, zatímco on je zná. Dále nejsou povoleny žádné skryté tahy, stejně jako současné tahy obou hráčů (to je ostatně vyloučeno i bodem (2)). Předpoklad (7) jinými slovy říká, že hráči hrají tak, jak nejlépe je to možné, nedělají zbytečné chyby, vždy vědí, jaký tah je pro ně nejlepší, a tak dále.

Často se ještě přidává podmínka, že hra má být *konečná*, čili má skončit po konečném počtu kol bez ohledu na to, jak hráči hrají. Občas se v kombinatorických hrách nepřipouští možnost remízy – spolu s podmínkou konečnosti to pak znamená, že hra nutně skončí vítězstvím jednoho z hráčů. My tyto podmínky nebudeme vyžadovat, ačkoliv většina her, kterými se budeme zabývat, je splňuje.

Kombinatorickou hrou jsou například piškvorky na hracím plánu 10×10. Hráči jsou dva, pravidelně se střídají. Je-li hráč na řadě, pak je jeho tahem nakreslení svého symbolu na libovolné prázdné pole uvnitř plánu. Pozicemi jsou všechna možná „pokreslení“ plánu, kterých bylo dosaženo v souladu s pravidly. Startovní pozice je prázdný plán. Vyhrává hráč, který jako první vytvoří řadu alespoň pěti svých symbolů, jeho soupeř v takovém případě prohrává. Remíza nastává tehdy, když není možný žádný další tah, neboť hrací plán je zcela zaplněn. V obou předchozích případech se tedy hra dostala do koncové pozice.

Které další známé hry jsou kombinatorické? Ruleta a vrhcáby nikoliv (prvky náhody), poker nebo lodě rovněž ne (zatajování informace). Kámen-nůžky-papír neprojdou přes druhý bod (pravidelné střídání hráčů). Solitaire je jen pro jednoho hráče, a tudíž také nepřipadá v úvahu. Volejbal, softbal, badminton a další míčové hry sice jsou pro „dva hráče“, ale kvůli značným obtížím s definováním pozice a tahu je také nepovažujeme za kombinatorické hry.

Existují tedy vůbec nějaké další kombinatorické hry kromě piškvorek? Co třeba šachy? Ano, šachy všechny podmínky splňují. No a dál … dál je jich ještě spousta! Za chvíli si je předvedeme, nejprve ale pár obecných slov o tom, co je strategie a co jsou vyhrávající a prohrávající pozice.

Strategie

Strategií hráče rozumíme soubor rozhodnutí, jaké tahy volit v jednotlivých pozicích hry.[2] *Vyhrávající strategie* je taková, která vede k vítězství hráče bez ohledu na to, jak chytře hraje jeho protihráč (tedy bez ohledu na protihráčovu strategii). Obdobně, má-li jeden z hráčů *neprohrávající strategii*, znamená to, že pokud se jí bude držet, hru neprohraje, ať jeho soupeř hraje sebelépe.

Poslední dva pojmy se mohou lišit ve hrách připouštějících remízu nebo v nekonečných hrách. Ujasněme si nejprve, jak vlastně může hra dopadnout (všimněte si, že jsme schválně nenapsali „skončit"):

(A) Vítězstvím prvního hráče a prohrou druhého.
(B) Prohrou prvního hráče a vítězstvím druhého.
(C) Remízou – hra skončila, ale ani jeden z hráčů nevyhrál ani neprohrál.
(D) Hra neskončí v konečném počtu tahů, neboli nikdy se nedostane do koncové pozice.[3]

Má-li vyhrávající strategii první hráč, pak umí hrát tak, aby nastal případ (A). Naproti tomu, má-li neprohrávající strategii, je v jeho možnostech „pouze" zabránit případu (B). Analogicky pro druhého hráče.

Případy (C) a (D) nebudeme pro jednodušší vyjadřování rozlišovat a oba budeme shodně nazývat remízou.

Vyhrávající a prohrávající pozice

V této kapitole budeme uvažovat pouze konečné hry nepřipouštějící remízu. V takových hrách můžeme každou pozici označit buď jako vyhrávající, nebo jako prohrávající. Jak už název napovídá, nachází-li se hráč ve *vyhrávající pozici* – V, pak (bude-li hrát, jak nejlépe lze) hru vyhraje. Naopak, nachází-li se v *prohrávající pozici* – P, hru nutně prohraje (pokud jeho soupeř neudělá chybu, což neudělá, neb jsme se již výše dohodli, že oba hráči jsou racionální).

Jak u konkrétní pozice v dané hře poznáme, zda je vyhrávající, nebo prohrávající? Pomohou nám k tomu následující pozorování:

(i) Jedná-li se o koncovou pozici, pak pravidla určují, zda je V, nebo P.
(ii) Vede-li z nějaké pozice alespoň jeden tah do P pozice, pak je tato V. Pokud se totiž právě v takové pozici nacházíme, můžeme svým tahem do oné prohrávající pozice svého soupeře postavit a tím mu zaručit prohru a sobě výhru.
(iii) Vedou-li z nějaké pozice všechny tahy pouze do V pozic, pak je tato P. Ať totiž z takové pozice hrajeme jakkoliv, vždy „předáme" soupeři hru ve vyhrávající pozici, tedy my se musíme nacházet v prohrávající.

Teď už je snadné postupně u všech pozic rozhodnout, jaké jsou. Začneme od konce (podle bodu (i)). Dále, vedou-li z nějaké pozice všechny tahy do již označených pozic, můžeme podle pravidel (ii) a (iii) rozhodnout, o jakou pozici se jedná. A protože je pozic konečně mnoho, skutečně se nám postupně podaří označit všechny.

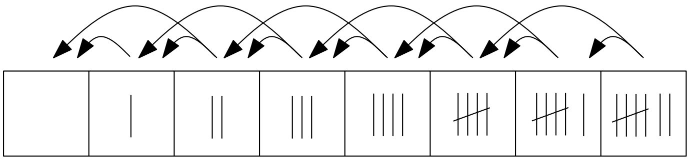
Všimněme si ještě, že bylo důležité předpokládat konečnost hry. U nekonečné hry bychom totiž nemuseli „mít kde začít", ani by se nám nemuselo podařit v konečném čase označit všechny pozice.

Nejlepší bude osvětlit si právě zavedené pojmy na příkladu.

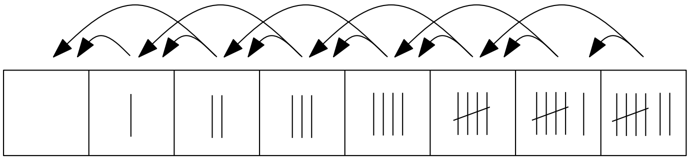
Hra 1. Na stole je hromádka sedmi sirek. Hráč, který je na řadě, může odebrat jednu nebo dvě sirky. Kdo nemůže táhnout (na stole už není žádná sirka), prohrál.

Řešení. Nakresleme si možné počty sirek včetně možných tahů z jednotlivých pozic – viz obrázek.

[2] Přesněji lze definovat strategii jako funkci, která každé možné pozici přiřadí tah hráče.
[3] To se může stát například u piškvorek hraných na nekonečně velkém hracím plánu.

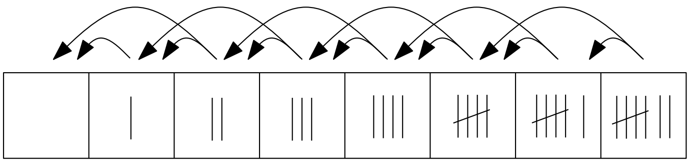


Koncová pozice je v této hře jediná (na stole nezbyla žádná sirka) a podle pravidel je prohrávající. Můžeme si to poznačit do nákresu.



P

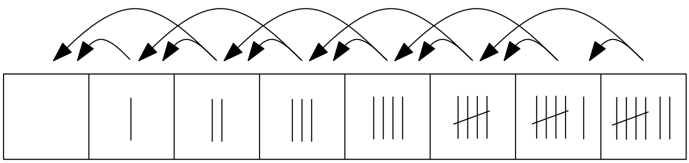
Pokud na stole zbývá jedna nebo dvě sirky, může je hráč ve svém tahu všechny odebrat a tím vyhrát (jeho soupeř se dostane do pozice, o které už víme, že je prohrávající).



P V V

Zbývají-li na stole tři sirky, pak hráč nemá jinou možnost než táhnout do vyhrávající pozice (což jistě potěší jeho protihráče), a tedy tři sirky jsou prohrávající pozice.

Z hromádky čtyř, resp. pěti sirek lze odebrat jednu, resp. dvě a tím se dostat do prohrávající pozice – proto jsou obě tyto pozice vyhrávající. Podobně si můžeme rozmyslet, že šest sirek je prohrávající pozice a sedm vyhrávající.



P V V P V V P V

Po označení V a P pozic v této hře je ihned patrná vyhrávající strategie prvního hráče – hraj tak, aby protihráči zbyly na stole sirky v počtu násobků tří. ♠

Vyslovme si důležitou větu o kombinatorických hrách. Myšlenka důkazu není nijak obtížná – už jsme si ji v podstatě rozmysleli spolu se zavedením V a P pozic.

Věta. (O vyhrávající strategii) *V konečné hře nepřipouštějící remízu má právě jeden z hráčů vyhrávající strategii.*

Důkaz. Z definice V a P pozic plyne, že pokud je startovní pozice V, může první hráč zahrát takový tah, aby se soupeř během svého tahu ocitl v pozici P a musel prvního hráče dostat opět do stavu V. Protože je hra konečná, dosáhne tímto opakováním první hráč vítězství, a má tedy vyhrávající strategii. Pokud je ovšem startovní pozice P, pak všechny tahy prvního hráče vedou do V pozic a druhý hráč se ocitá v roli prvního hráče v předchozích úvahách. Tedy vyhrávající strategii má druhý hráč. ♣

Poznámka. Obdobně jako V a P pozice by se daly v konečných hrách s možností remízy zavést *neprohrávající* a *nevyhrávající pozice*. Rovněž platí, že jeden z hráčů má vždy neprohrávající strategii, a to dokonce i v nekonečných hrách. Stačí si rozmyslet, co znamená nemít vyhrávající strategii – pokud ji totiž nemám, pak mi protivník vždycky umí zabránit ve výhře, a tedy sám má neprohrávající strategii.

Poznámka. Všimněme si ještě, že důkaz věty nám nejen dává jistotu, že vyhrávající strategie existuje, ale dokonce nám dává i přesný návod, jak ji najít. Pokud jsme schopni u nějaké hry rozdělit všechny její pozice na vyhrávající a prohrávající, pak jsme rovněž hráči s vyhrávající strategií dali do ruky návod, jak hrát a vyhrát.

Problém může nastat – a často také nastává – v tom, že teoreticky jsme sice schopni všechny pozice označit jako V, či P, ale ve skutečnosti může mít hra tolik různých pozic, že není v lidských (ani počítačových) silách se všemi možnostmi probrat. Taková situace je například u šachů – ačkoliv se jedná o konečnou kombinatorickou hru, a tedy jeden z hráčů má neprohrávající strategii, již po pár tazích se počet pozic rozrůstá natolik, že si s tím množstvím zatím nikdo neporadil.

Metody řešení

Když už známe všechny podstatné pojmy, můžeme se vesele pustit do hraní rozličných kombinatorických her. V následujících kapitolách si postupně představíme různé metody hledání vyhrávajících a neprohrávajících strategií. Na konci každé kapitoly naleznete pár příkladů na samostatné procvičení.

Podstatnou částí řešení rovněž bývá přijít na to, kterou metodu použít. Proto v poslední kapitole najdete směs úloh, u kterých vám nikdo předem neprozradí, jakou metodou se mají řešit. Občas to bude metoda uvedená v tomto textu, jindy bude nutné vymyslet nový způsob, jak se s danou hrou vypořádat.

Zpětný rozbor

V kapitole o vyhrávajících a prohrávajících pozicích jsme se naučili, jak v libovolné konečné kombinatorické hře nalézt vyhrávající strategii pro jednoho z hráčů (máme-li dostatečnou výpočetní kapacitu). Tuto metodu budeme nazývat *zpětný rozbor*, cizím slovem *backtracking*, neboť hru vlastně (vy)řešíme od konce.

Zkusme s její pomocí vyřešit následující hry. Není-li řečeno jinak, pak „vyřešením“ hry se míní nejen nalezení vyhrávající strategie pro jednoho z hráčů, ale i její popsání.

Hra 2. Na stole leží 15 sirek. Hráč, který je na řadě, může odebrat 1 až 4 sirky. Kdo nemůže táhnout, prohrál.

Řešení. Hra je velmi podobná té, kterou jsme si podrobně rozebrali v předchozí kapitole. Nakreslíme si tedy, jak to vypadá s V a P pozicemi.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P	V	V	V	V	P	V	V	V	V	P	V	V	V	V	P

Vidíme, že vyhrávající strategii má druhý hráč. První hráč nemá na začátku jinou možnost než táhnout do vyhrávající pozice, a tím pádem druhý hráč ho svým tahem umí znovu dostat do prohrávající pozice.

Vyhrávající strategii druhého hráče můžeme popsat slovy „vždy seber takový počet sirek, aby na stole zůstal ležet násobek pěti.“ První hráč je tak nucen nechat na stole „nenásobek“ pěti, což dává druhému hráči možnost dorovnat opět na násobek, až na stole zbude 5×0 sirek, a tedy první hráč prohraje.

Stejná strategie funguje pro libovolný startovní počet sirek n. Pro násobky pěti má vyhrávající strategii druhý hráč, kdežto pro všechny možné počty sirek, které nejsou násobky pěti, má vyhrávající strategii první hráč. Popis vyhrávající strategie se nijak nemění, mění se pouze to, zda startovní pozice je V, nebo P. ♠

Hra 3. V pravém horním rohu šachovnice stojí jednostranná věž – může se pohybovat jen doleva nebo dolů. Hráči se střídají v tazích, přičemž si mohou vybrat, o kolik polí (minimálně však o jedno) pohnou věží v jednom z povolených směrů. Kdo nemůže táhnout, prohrál.

Řešení. Rozeberme od konce, které pozice jsou V a které P. Můžeme je ihned zakreslovat na šachovnici. Koncová pozice je opět jediná a je prohrávající. Dále můžeme rozhodnout o všech zbývajících pozicích v levém sloupci a v dolním řádku – z těch je totiž možné se jedním tahem dostat do levého dolního rohu a donutit soupeře prohrát (viz obrázek vlevo).

8	V							
7	V							
6	V							
5	V							
4	V							
3	V							
2	V							
1	P	V	V	V	V	V	V	V
	1	2	3	4	5	6	7	8

8	V	V	V	V	V	V	V	P
7	V	V	V	V	V	V	P	V
6	V	V	V	V	V	P	V	V
5	V	V	V	V	P	V	V	V
4	V	V	V	P	V	V	V	V
3	V	V	P	V	V	V	V	V
2	V	P	V	V	V	V	V	V
1	P	V	V	V	V	V	V	V
	1	2	3	4	5	6	7	8

Všechny přípustné tahy z políčka $(2, 2)$ vedou do již označených pozic. Ty jsou všechny s vyhrávající, tudíž $(2, 2)$ je prohrávající. Díky tomu jsou neoznačená pole ve druhém sloupci i řádku vyhrávající. Opakováním těchto úvah dospějeme k závěru, že naše startovní pozice – pravý horní roh – je prohrávající (obrázek vpravo).

Vyhrávající strategii má druhý hráč a můžeme ji popsat slovy „udržuj věž na šikmé[4] diagonále“. ♠

Cvičení. V následujících hrách určete, které pozice jsou vyhrávající a které prohrávající. Nalezněte vyhrávající strategii pro jednoho z hráčů a popište ji.

Hra 4. Na stole leží hromádka n sirek, kde n je libovolné přirozené číslo. Hráči z ní sirky střídavě odebírají, a kdo nemůže hrát, prohrál. Tentokrát ale může hráč v jednom tahu odebrat 1, 2, nebo 4 sirky. Který hráč má (v závislosti na n) vyhrávající strategii? A co kdyby se směly odebírat všechny mocniny dvojky?

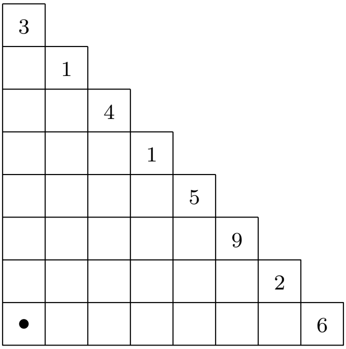
Hra 5. Pravidla jsou stejná jako v předchozí hře, ale kdo nemůže hrát, vyhrál.

[4] Šikmým směrem nazýváme směr z levého dolního do pravého horního rohu (či naopak). Směr z levého horního do pravého dolního rohu se nazývá kosmý.

Hra 6. V pravém horním rohu šachovnice stojí jednostranný král (smí se pohybovat právě o jedno pole dolů, doleva nebo doleva dolů). Hráči jím střídavě táhnou, a kdo nemůže hrát, prohrál.

Poznámka. V následujících hrách nejde ani tolik o to, kdo vyhraje, jako (o) kolik vyhraje. Mohlo by se tedy zdát, že se jedná o zcela jiný typ her (a v jistém smyslu také ano), nicméně metoda zpětného rozboru velmi dobře funguje i na ně – jen si to zkuste!

Hra 7. Max a Mína si z šachovnice vyřezali zubatou desku a na kosmou diagonálu napsali čísla – viz obrázek.



Do levého dolního rohu postavili vymyšlenou figurku prince a střídají se v tazích – vždy smí s princem táhnout o jedno pole doprava nebo nahoru. Když se dostanou na očíslované pole, hra končí. Max se snaží, aby princ skončil na poli s co největším číslem, kdežto Mína se snaží výsledné číslo minimalizovat. S jakým číslem hra skončí, začíná-li Mína? A s jakým, začíná-li Max?

Hra 8. Max a Mína tentokrát žádnou šachovnici neničili, jen si její pole v horním řádku a pravém sloupci popsali čísly – viz obrázek.

9	8	7	6	5	4	3	2
							8
							7
							6
							5
							4
							3
•							2

Do levého dolního rohu postavili postupně

(i) prince (smí o jedno pole doprava nebo nahoru),
(ii) věž (libovolný počet polí doprava nebo nahoru),
(iii) krále (smí o jedno pole doprava, nahoru nebo doprava nahoru)

a s každou figurou si zahráli stejnou hru jako před chvílí – střídají se v tazích, hra končí spočinutím figury na očíslovaném poli. Max se snaží výsledek maximalizovat, Mína minimalizovat. Jak všechny hry dopadnou, je-li Max galantní a nechává Mínu začínat?

Návod. V případě (iii) pomůže nakreslit si dvě šachovnice místo jedné.

Kradení strategií

Metoda *kradení strategií* je založena na úvaze „kdyby měl vyhrávající strategii můj soupeř, mohl bych ji okopírovat (ukrást), a tím pádem bychom měli vyhrávající strategii oba, takže on ji mít nemohl".

Na rozdíl od ostatních metod se jedná o *nekonstruktivní* metodu – umožňuje nám sice zjistit, kdo z hráčů má vyhrávající nebo neprohrávající strategii, ale vůbec nám neřekne, jak taková strategie vypadá, a jak má tedy onen hráč hrát, aby vyhrál/neprohrál.

Ukažme si celou myšlenku ukradnutí strategie na piškvorkách. Ještě poznamenejme, že jelikož se nejedná o konečnou hru, nemusí existovat vyhrávající strategie, určitě ale existuje neprohrávající.

Hra 9. (Piškvorky) Na nekonečně velký čtverečkovaný papír kreslí do prázdných polí dva hráči střídavě křížky (první hráč) a kolečka (druhý hráč). Vyhrává ten, který jako první vytvoří nepřerušenou řadu – svisle, vodorovně nebo diagonálně – alespoň pěti svých symbolů.

Tvrzení. *V piškvorkách má první hráč neprohrávající strategii.*

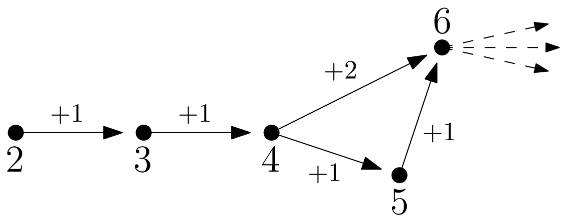
Důkaz. Pro spor předpokládejme, že druhý hráč má vyhrávající strategii. V tu chvíli může první hráč svůj první tah „zahodit" – táhnout na libovolné pole ve hře, nadále si tohoto křížku nevšímat a tím se dostat do role druhého hráče, který má dle předpokladu vyhrávající strategii. Pokud by v průběhu hry součástí vyhrávající strategie bylo hrát na pole, na které první hráč „zahodil" svůj první tah, tak hráč svůj „přebytečný" křížek „zahodí" na nějaké jiné volné pole. Tohoto nově „zahozeného" křížku si nevšímá a tváří se, jako že právě zahrál na místo, kam mu vyhrávající strategie radila (funguje to tak dobře proto, že nezáleží na tom, kdy se křížek na nějakém poli objevil – důležité je pouze to, zda tam leží).

Pokud by v průběhu hry první hráč zase potřeboval hrát na pole, kde má svůj „zahozený" křížek, jednoduše současný tah opět „zahodí" někam jinam. Tímto způsobem první hráč úspěšně okopíroval vyhrávající strategii druhého hráče – ale to je spor, neboť oba hráči nemohou mít vyhrávající strategii najednou.

Dokázali jsme tedy, že druhý hráč nemůže mít vyhrávající strategii, a proto má první hráč strategii neprohrávající. ♣

Hra 10. (Přičítání dělitelů) Začíná se dvojkou. V jednom tahu hráč přičte k číslu jeho libovolného vlastního dělitele.[5] Kdo jako první překročí 5773, prohrál. Kdo má vyhrávající strategii? A co kdyby ten, kdo první překročí 5773, vyhrál?

Řešení. Nakresleme si, jak vypadá prvních pár pozic – viz obrázek.



Díky tomu, že hra je konečná a nepřipouští remízy, je pozice 6 buď vyhrávající, nebo prohrávající. Pokud je prohrávající, pak začínající hráč, který je na řadě rovněž v pozici 4, bude volit přičtení dvojky, čímž se druhý hráč dostane do prohrávající pozice 6.

Na druhou stranu, je-li pozice 6 vyhrávající, pak začínající hráč může z pozice 4 táhnout do pozice 5, odkud jeho protivník musí nutně táhnout do pozice 6, čímž se první hráč ocitl ve vyhrávající pozici.

[5] Vlastní dělitelé jsou dělitelé ostře menší než číslo samotné. Např. vlastní dělitelé čísla 12 jsou čísla 6, 4, 3, 2, 1.

Tím jsme dokázali, že první hráč má vyhrávající strategii – vždy si ji může pro sebe ukradnout. ♠

Poznámka. Mohlo by se zdát, že strategii krade vždy první hráč druhému, ale není tomu tak. Co když předchozí hru nezačneme s číslem 2, ale 3?

Cvičení. A teď už si zkuste krást strategie samostatně. Který hráč má vyhrávající/neprohrávající strategii?

Hra 11. (Dvojité šachy) Pravidla jsou stejná jako v klasickém šachu s jediným rozdílem – hráč, který je na řadě, dělá tahy dva.

Hra 12. (Mazání dělitelů) Na tabuli jsou napsána všechna přirozená čísla od 1 do 16. Hráč, který je na tahu, smaže nějaké číslo a spolu s ním všechny jeho dělitele, kteří na tabuli ještě zbyli. Prohrává hráč, který nemůže táhnout – tedy ten, na kterého zbyla čistá tabule.

Symetrie

Následující technika se dá použít ve hrách, které jsou určitým způsobem symetrické – umožňují hráči kopírovat tahy svého soupeře. Základní myšlenka by se dala popsat slovy „dokud může hrát soupeř, mohu i já".

Hra 13. (Mince na stole) Loupežníci Kenny a Jarda ukořistili truhlu plnou zlatých kulatých mincí a rozhodli se zahrát si o ně hru. Odněkud vytáhli čtvercový stůl a postupně na něj pokládají mince. Ten, kdo je zrovna na řadě, na stůl položí jednu minci tak, aby (ani zčásti) neležela na jiné minci a nepřesahovala okraj stolu.[6] Začíná Kenny. Prohraje ten, kdo už na stůl nemůže položit další minci. Kdo má vyhrávající strategii? (PraSe – 27/2 – úloha 5)

Řešení. Vyhrávající strategii má Kenny. Stačí, když ve svém prvním tahu položí minci doprostřed stolu. Pokud se na stůl už žádná další mince nevejde, Kenny hned vyhrává. Pokud se na stůl ještě alespoň jedna mince vejde, je na tahu Jarda. Ten ať položí svou minci kamkoliv, ze středové souměrnosti stolu a prostřední mince vyplývá, že na stole existuje alespoň jedno volné místo – obraz Jardovy mince ve středové souměrnosti podle středu stolu. Přesně na toto místo Kenny položí svoji minci. Dále opět pokládá Jarda a Kenny reaguje položením mince na středově souměrné místo, a tak dále.

Jelikož je stůl konečný, nastane po určité době situace, kdy už nebude možné mince nikam pokládat. Nemůže-li nakonec položit minci Jarda, Kenny zvítězil. Nemůže-li Kenny, znamená to, že o tah dříve ani Jarda nemohl položit svoji minci, neboť Kenny vždy reaguje na Jardův tah a celou dobu udržuje pokrytí stolu středově symetrické. Máme tedy jasnou výherní strategii pro Kennyho (remíza nastat nemůže). ♠

Hra 14. (Lámání čokolády) Riikka a Jussi dostali velkou (200 gramů, 4×8 kostiček) finskou hruškovou čokoládu a rozhodli se zahrát si s ní následující hru. Ve svém tahu může hráč rozlomit (láme se rovně po vyznačených čárách) libovolný kus čokolády, který ještě rozlomit lze. Kdo rozlomí poslední kousek, vyhrál a může celou čokoládu sníst. Kdo vyhraje, začíná-li lámat Riikka a pravidelně se s Jussim střídají?

Řešení. Představme si, že se nacházíme někde uprostřed hry a čokoláda je rozlámána na n kusů. Dalším tahem dojde k rozlomení jednoho z kusů na dva nové – celkový počet kusů tím vzroste na $n+1$. Z toho je patrné, že ať oba hráči hrají jakkoliv, hra skončí po 31 kolech – začínáme s čokoládou v jednom kuse a končíme, když je všech 32 dílků samostatných. Hru-nehru[7] tudíž vyhrává Riikka a ani jí to nedá moc práce. ♠

[6] Všechny mince jsou stejně velké a stůl je tak obrovský, že se na něj vejde alespoň jedna mince.

[7] Pokud se vám zdá, že takováhle hra přeci není „pořádná" hra, neboť hráči nijak nemohou ovlivnit její výsledek (dokonce ani kdyby chtěli hrát ve svůj neprospěch), nenechejte se zmást – definici kombinatorické hry splňuje.

Hra 15. (Lámání čokolády bez 1×1) Na Vánoce Riikka s Jussim dostali jinou velkou (4×8 kostiček) finskou čokoládu, tentokrát peprmintovou. Protože minule se jim hra moc nelíbila, přidali pravidlo, že se nesmí ulamovat dílky velikosti 1×1. Kdo nemůže v souladu s pravidly táhnout, prohrál. Má začínající Riikka vyhrávající strategii, nebo si na čokoládě pochutná pro změnu Jussi?

Řešení. I tentokrát má vyhrávající strategii Riikka. V prvním tahu rozlomí čokoládu napůl podél svislé osy a podle tohoto lomu se bude celou hru osově symetricky řídit. Pokud Jussi ve svém tahu rozlomí kus nalevo/napravo od osy, rozlomí Riikka osově symetricky odpovídající kus napravo/nalevo od osy. Dokud může Jussi hrát, může Riikka hrát minimálně ještě jednou – díky tomu, že hru celou dobu udržuje osově symetrickou. Čokoláda je konečná, a tím pádem jednomu z hráčů jednou dojdou tahy jako prvnímu. Podle pozorování výše to musí být Jussi.

Poznámka na závěr – Riikka mohla místo osové symetrie stejně dobře využít středovou symetrii. ♠

Cvičení. V následujících hrách nalezněte vyhrávající/neprohrávající strategii pro jednoho z hráčů a popište ji.

Hra 16. Dva hráči střídavě kreslí křížky do tabulky 3×3. Vyhraje ten, kdo první vytvoří souvislou trojici křížků (vodorovně nebo svisle).

Hra 17. Dvě šachu znalá PraSátka – Kuba a Anička – střídavě pokládají jezdce své barvy na šachovnici tak, aby se žádná dvojice znepřátelených jezdců neohrožovala. Kdo nemůže položit dalšího jezdce, prohrál. Kuba je galantní a nechá Aničku začínat.

Hra 18. Je dána tabulka o rozměrech 17×68. Hráč si ve svém tahu vybere nějaký podčtverec tabulky, ve kterém ještě není vybarveno žádné políčko, a celý ho vybarví. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích. Kdo nemůže táhnout, prohrál.

Párování a obarvování

Pokud není možné nalézt ve hře takovou symetrii, která by nám dovolila použít předchozí metodu, můžeme zkusit metodu *párování*. Myšlenka je stále stejná – „dát hráči do ruky odpověď na každý protihráčův tah“. Často se tak děje rozdělením pozic do párů, odtud také název metody. Zahraje-li soupeř na jednu z pozic v páru, já zahraji na druhou. Další možností je rozdělení pozic/tahů do obecnějších skupin – viz následující příklad.

Hra 19. (Proužek čísel) Na proužku papíru je za sebou napsáno $2n$ čísel, kde n je libovolné přirozené číslo. Mišo s Háňou čísla postupně odstřihávají – ten, který je na řadě, si vybere jeden ze dvou konců a číslo na něm si ustřihne. Na konci oba sečtou všechna čísla, která si pro sebe ustřihli, a kdo má větší součet, vyhrál. Je-li součet stejný, nastává remíza. Který z nich má neprohrávající strategii, když Háňa začíná a pravidelně se v tazích střídají?

Řešení. Neprohrávající strategii má Háňa bez ohledu na to, jaká čísla jsou na proužku napsaná a kolik jich je (důležité je pouze to, aby jich byl sudý počet).

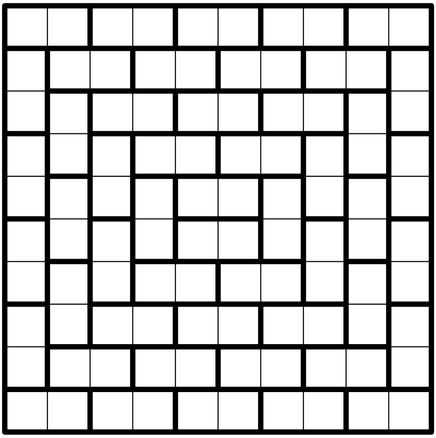
Obarvěme čísla na lichých pozicích šedě, na sudých bíle (viz obrázek pro $n = 6$) a spočítejme, je-li větší součet čísel na šedých místech, nebo na bílých.

Předpokládejme, že větší součet je na šedých polích. Háně k vítězství stačí ustřihnout si v každém svém tahu číslo na šedém poli. Mišovi tím pádem vždycky předá proužek, jehož oba kraje jsou bílé. Mišo jeden z nich ustřihne, čímž se Háně zpřístupní další šedé pole, a tak dále. Na konci má Háňa všechna čísla, která byla na šedých polích, a Mišo všechna, která byla na bílých, a jak jsme předpokládali, součet na šedých je vyšší, tedy Háňa vyhrála.

Pokud by součty na šedých i bílých polích byly shodné, umí si výše popsaným postupem Háňa zaručit remízu, a tedy má vskutku neprohrávající strategii. ♠

Hra 20. (Piškvorky do čtverce) Lukáše s Viktorem už přestalo bavit hrát při hodinách obyčejné piškvorky, a tak vymysleli obměnu – hrají na čtverečkovaném papíře 10×10, a pravidelně se střídají v tazích. V každém tahu hráč nakreslí svůj symbol do volného pole. Lukáš vyhraje, pokud vytvoří ze svých symbolů čtverec 2×2, a Viktor vyhraje, když se mu v tom podaří zabránit. Lukáš začíná. Který z nich má vyhrávající strategii?

Řešení. Vyhrávající strategii má druhý hráč – Viktor. Vzhledem k pravidlům mu stačí, když v každém možném čtverci 2×2, který se na hracím plánu vyskytuje, bude mít alespoň jeden svůj symbol dřív, než Lukáš všechny čtyři. Aby toho dosáhl, stačí si chytře rozdělit hrací plán na pomyslná domina – viz obrázek.



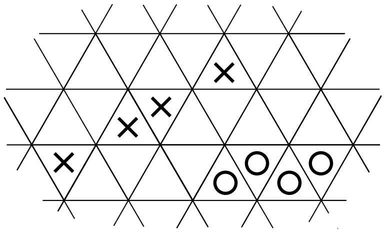
Teď už je Viktorova strategie jasná – ať Lukáš umístí svůj znak kamkoliv, Viktor nakreslí svůj do odpovídajícího domina. Jelikož každý čtvereček 2×2 obsahuje alespoň jedno celé domino a v každém dominu je nejvýše jeden Lukášův znak, nemůže Lukáš vyhrát. Hra je konečná a remízu pravidla nepřipouštějí, z čehož plyne, že vyhrávající strategii má opravdu Viktor. ♠

Cvičení. V následujících hrách nalezněte vyhrávající/neprohrávající strategii pro jednoho z hráčů a popište ji.

Hra 21. (Razítka) Vejtek se z dlouhé chvíle pustil do následující hry. Postupně dává na prázdná šachovnicová pole razítka, střídavě červené a zelené, a to tak, že nově orazítkované pole musí hranou sousedit s polem, které bylo orazítkováno těsně před ním. První – zelené – razítko může dát Vejtek kamkoliv. Prohrává ta barva, jejíž razítko už Vejtek nikam dát nemůže. Během celé hry Vejtek samozřejmě hraje co nejlépe podle toho, kterou barvu zrovna zastupuje – je-li na tahu zelené razítko, hraje Vejtek v jeho prospěch, a je-li na tahu razítko červené, pak hraje ve prospěch červených.

Hra 22. (Trojúhelníkové piškvorky) Dva hráči hrají piškvorky na nekonečně velkém trojúhelníkovém papíře a střídají se v tazích. Ten, kdo je na tahu, vždy nakreslí svou značku do některého volného políčka. Vyhraje hráč, který má jako první nepřerušenou rovnou řadu[8] alespoň n svých znaků, kde n je nějaké přirozené číslo. V závislosti na n určete, kdo má vyhrávající nebo neprohrávající strategii.

[8]Směřující jedním ze tří možných směrů podél čar trojúhelníkové sítě.



Pro upřesnění ještě dodejme, že vyobrazená posloupnost křížků **není** řadou, zatímco posloupnost koleček **je** řadou. (PraSe – 27/2 – 8. úloha)

Zkuste si sami!

Teď už si můžete sami vyzkoušet, co jste se naučili v předchozích kapitolách. Úkolem je vždy popsat vyhrávající či neprohrávající strategii jednoho z hráčů. A pokud ji náhodou popsat neumíte, tak alespoň zjistit, kdo ji má. Nezapomeňte, že zpětným rozborem se sice teoreticky dají vyřešit všechny konečné hry, mnohdy je ale lepší zkusit přijít na nějaký elegantnější způsob řešení – vždyť kdo by se chtěl rozepisovat se všemi pozicemi např. v *Piškvorkách do čtverce* nebo v *Mincích na stole*? A když už se do rozebírání případů pustíte (někdy to ani jinak nejde), zkuste to šikovně – pokuste se objevit v úloze nějaký skrytý princip a ušetřit si zbytečnou práci. Nestačí se třeba jen podívat ze správného konce (viz další příklad)?

Úlohy jsou přibližně seřazené podle obtížnosti.

Dobře si zahrajte!

Hra 23. (Dělitelnost 7) Dva hráči píší dvaceticiferné číslo tak, že zleva doprava střídavě připisují jednu cifru. První hráč vyhraje, pokud výsledné číslo nebude dělitelné sedmi. Druhý vyhraje, pokud dělitelné sedmi bude.

Řešení. Poslední cifru (na místě jednotek) píše druhý hráč, a ten má také vyhrávající strategii. Prvních devět tahů může zahrát libovolně, k vítězství mu stačí zvolit správnou cifru ve svém posledním tahu, což se mu podaří, jelikož v každé desetici po sobě jdoucích čísel alespoň jedno dělitelné sedmi je. ♠

Hra 24. (Dělitelnost 13) Stejná hra jako předchozí, pouze vyměníme 7 za 13.

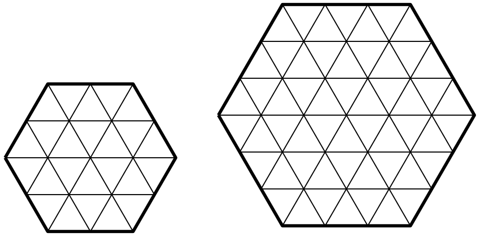
Hra 25. (Mocnění) Dva hráči hrají takovouto hru: První si vybere libovolné přirozené číslo od 2 do 9 a předá ho druhému. Druhý si rovněž vybere přirozené číslo od 2 do 9 a to číslo, které dostal, na něj umocní. Výsledek vrátí prvnímu. Ten si zase vybere jedno z čísel mezi 2 a 9, umocní na něj to obdržené, atd. Vyhraje ten, kdo jako první vytvoří číslo větší než 1000.

Hra 26. (Plus minus) V řadě za sebou je napsáno několik minusů. Matěj s Jonášem střídavě překreslují jeden až dva sousední minusy na plus. Vyhraje ten, který překreslí poslední minus.

Hra 27. (Plus minus podruhé) Uvažujte předchozí hru s jediným rozdílem – minusy jsou napsány do kruhu (tedy každé znaménko má na začátku dva sousedy).

Hra 28. (Kocouři) Dva kocouři dostali řetěz z n buřtů a střídavě přehryzávají spojnice mezi nimi. Buřty, které ve svém tahu osamostatní (tedy ty, které už nebudou spojeny s žádným jiným buřtem), snědí. Vyhraje ten kocour, který sní více buřtů. Řešte postupně pro $n = 6$, $n = 7$, $n \in \mathbb{N}$ libovolné.

Hra 29. (Šestiúhelníky) Helča s Alčou se neznámo kde dostaly k čokoládám ve tvaru pravidelného šestiúhelníku. Každá čokoláda je rozdělena na trojúhelníkové dílky. Na obrázku jsou čokolády o hraně 2 a 3.



Hráčky si vybraly jednu čokoládu o hraně n a hrají s ní následující hru. Ta, která je na tahu, rozlomí (láme se rovně po vyznačených čárách) čokoládu na dvě části, z nichž jednu sní a druhou předá zpátky soupeřce. V tazích se pravidelně střídají, začíná Helča. Kdo nemůže táhnout, prohrává. Řešte postupně pro $n = 2$, $n = 3$, $n \in \mathbb{N}$ libovolné.

Hra 30. (Dvě hromádky) Šavlík s Mončou mají dvě (ne nutně stejně početné) hromádky kávových bonbónů. Hráč, který je na tahu, sní všechny bonbóny z jedné hromádky a druhou hromádku rozdělí na dvě – dle vlastního uvážení, ale v obou nových hromádkách musí být alespoň jeden bonbón. Pravidelně se střídají v tazích. Kdo nemůže táhnout (což nastane právě tehdy, bude-li na obou hromádkách po jednom bonbónu) prohrál.

Hra 31. (Chomp) Tabulka čokolády je rozlámána na kostičky. Kostička v levém dolním rohu je otrávená (kdo ji sní, prohraje). Hráč si ve svém tahu vybere kostičku, sní ji a spolu s ní sní rovněž všechny kostičky v pomyslném obdélníku, jehož levým dolním rohem je právě vybraná kostička.[9] Hráči se pravidelně střídají v tazích. V závislosti na rozměrech určete, kdo zvítězí, je-li čokoláda

(i) čtvercová,
(ii) obdélníková.

Hra 32. (Barvení bodů) Pepa a Mirek obarvují body v rovině. Začíná Pepa obarvením jednoho bodu oranžově, poté Mirek obarví 100 bodů žlutě, Pepa jeden oranžově, Mirek 100 žlutě, ... (přebarvovat již jednou obarvené body není možné). Dokažte, že Pepovi se podaří vytvořit rovnostranný trojúhelník s oranžovými vrcholy.

Hra 33. (Piškvorky 2 : 1) Majkl s Ančou hrají piškvorky na nekonečně velkém papíře s následující úpravou pravidel. Začínající Anča v každém svém tahu nakreslí jeden křížek, zatímco Majkl nakreslí v každém tahu dvě kolečka. Majkl vyhraje, když vytvoří nepřerušenou řadu sta koleček – buď svisle, nebo vodorovně. Anča se mu v tom samozřejmě snaží zabránit. Dokažte, že Majkl má vyhrávající strategii.[10]

[9] Tedy včetně kostičky samotné a kostiček přímo napravo a nahoru od ní.

[10] Jak víme, obecně má u nekonečných her jeden z hráčů pouze neprohrávající strategii. V této hře si ale Majkl umí zajistit výhru.

Seriál – Teorie her II

Představte si, že hrajete se svým kamarádem turnaj zároveň v Odebírání sirek, Piškvorkách do čtverce a Mincích na stole (viz hry číslo 1, 9 a 13 z předchozího dílu). Ten, kdo je na tahu, si jednu z her vybere a udělá v ní tah podle jejích pravidel, zatímco zbylé dvě hry nechá beze změny. Poté hraje soupeř – opět v jedné z her dle svého výběru. Celý turnaj končí ve chvíli, kdy není možné v žádné z her udělat další tah. Hráč, který se do takovéto nepříjemné situace dostane jako první, prohrál.

Z minulého dílu známe a umíme popsat vyhrávající strategii pro začínajícího hráče v každé z jednotlivých her. Znamená to, že má začínající hráč vyhrávající strategii i v celém turnaji? A uměli bychom to nějak dokázat? Či onu strategii dokonce popsat?

Dokud budeme pozice ve hře označovat pouze jako vyhrávající (V) nebo prohrávající (P), nejspíš se nám to nepodaří. Není totiž jasné, je-li výhodnější předat spoluhráči např. P pozici v Mincích na stole a V pozici v Odebírání sirek, nebo naopak. Zkrátka V a P pozice v sobě sice nesou dostatek informace, jak vyhrát jednu hru, ale chceme-li hry kombinovat, nemusí nám to stačit.

Co kdybychom však uměli každé herní pozici přiřadit nezáporné celé číslo – jakousi její „hodnotu“ – a táhli vždy ve hře, jejíž číslo je „nejvýhodnější“ (ať už to znamená cokoliv)?

Předchozí úvaha zjednodušeně popisuje myšlenku takzvaného *sčítání her*, což je metoda na hledání vítězné strategie, kterou se naučíme v tomto díle seriálu. Porozumění celému postupu nám ale chvíli zabere, tak už směle do toho!

Hra Nim

Hra Nim je jednou z nejznámějších kombinatorických her. Nejde o nic jiného, než o odebírání[11] sirek, jehož obměny jsme potkali v minulém díle. Základní varianta hry je následující:

Hra 34. (Nim) Na stole je n hromádek ($n \in \mathbb{N}$) obsahujících postupně x_1 až x_n sirek. Dva hráči se střídají v tazích. Ve svém tahu si hráč vybere jednu hromádku a odebere z ní libovolný počet sirek, minimálně však jednu. Hráč, který nemůže táhnout (na stole už není žádná sirka), prohrál. Pro hru s n hromádkami a počty sirek $x_1, \ldots, x_n$ budeme pozice zapisovat ve tvaru $(x_1, \ldots, x_n)$.

Cvičení. Zkuste si zahrát Nim s hromádkami $(2, 3, 1)$ či těžší variantu $(5, 7, 9)$.

První zamyšlení. Koncová pozice je pro každé n jediná: (0,0, ... , 0). Podle pravidel se jedná o P pozici.

Pokud je hromádka pouze jedna, hra je triviální – první hráč odebere všechny sirky z oné jediné hromádky, čímž zvítězí.

Jsou-li hromádky dvě, není těžké si rozmyslet, že pozice je prohrávající právě tehdy, je-li na obou hromádkách stejný počet sirek. V takovém případě totiž hráč A, který je na řadě, musí z jedné hromádky nějaké sirky odebrat, na což jeho soupeř B zareaguje odebráním stejného počtu sirek z druhé hromádky, čímž počty v obou hromádkách opět vyrovná. A tak pořád dokola, dokud hráč B svojí reakcí nedorovná obě hromádky na nulu, a A tedy prohraje.

[11] Však také samotný název hry nejspíš pochází z německého „Nimm!“, tedy „Ber!“.

Pro tři hromádky už je situace obtížnější. Samozřejmě se můžeme uchýlit k rozboru vyhrávajících a prohrávajících pozic (pro zadanou počáteční trojici je vždycky zvládneme určit v konečném čase), ale se vzrůstajícím počtem sirek to bude stále náročnější (a trochu nudné).

Naštěstí existuje metoda, jak i pro hromádky s větším počtem sirek rychle určit, zda se jedná o V, nebo P pozici. A co víc! Stejná metoda funguje nejen pro tři hromádky, ale i pro čtyři, pět, ... Pro její pochopení se nejprve seznámíme s dvojkovou soustavou.

Binární vsuvka

Pokud již dvojkovou soustavu znáte, jedinou novinkou v této kapitole pro vás bude nejspíš definice Nim-součtu a možná Pravidlo krácení (Tvrzení 2). Klidně tedy zbytek kapitoly přeskočte a případně se k němu vraťte, pokud přece jen v dalším textu narazíte na něco, co vám ohledně dvojkové soustavy není jasné.

V naší civilizaci jsme zvyklí zapisovat čísla v desítkové soustavě. Zápis 5702 je ve skutečnosti zkrácením rozpisu $5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$, z čehož je hned patrné, proč mu říkáme desítkový – využívá rozložení čísla na součet mocnin desítky. Není to ovšem jediný možný zápis. Nám se bude hodit *binární zápis*, neboli zápis čísla ve *dvojkové soustavě*, či chcete-li v *bázi o základu dva*.

Platí, že každé přirozené číslo x lze jednoznačně rozepsat pomocí mocnin dvojky s koeficienty 0 nebo 1. Jinými slovy, ke každému x existuje právě jedno $m \in \mathbb{N}_0$ a jednoznačně určená $x_m, x_{m-1}, \dots, x_0 \in \{0, 1\}$, $x_m = 1$, taková, že

$$x = x_m \cdot 2^m + x_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \cdots + x_1 \cdot 2^1 + x_0 \cdot 2^0.$$

Binárním zápisem čísla x pak rozumíme výraz $(x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0)_2$. Nulu zapisujeme jako $(0)_2$. Závorku budeme občas vynechávat, bude-li bez ní zápis přehlednější. Tedy například

$$26 = 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = (11010)_2 = 11010_2.$$

Vypustíme-li podmínku $x_m = 1$, pak je binárním zápisem čísla 26 nejen $(11010)_2$, ale i $(011010)_2$ nebo třeba $(00000011010)_2$. V jistém smyslu jsme ztratili jednoznačnost binárního zápisu[12], ale zase nám to umožní snazší zápis v definici Nim-součtu. Můžeme totiž předpokládat, že každá dvě čísla mají stejně dlouhý binární zápis – stačí to „kratší“ doplnit nulami „na začátku“.

Jak převádět čísla do binárního zápisu. Pro malá čísla není převod mezi desítkovou a dvojkovou soustavou nic těžkého. Prostě se člověk „koukne“, jaká největší mocnina dvojky se v jeho čísle nachází, poznamená si ji, odečte a pokračuje dál. Převod druhým směrem – z dvojkové soustavy do desítkové – není nic jiného než sečtení správných mocnin dvojek.

Nicméně čísla z desítkové soustavy se do dvojkové dají převádět i následujícím algoritmem. Vznikající binární zápis píšeme zprava doleva!

(i) Je-li číslo sudé, zapiš si nulu. Je-li liché, zapiš si jedničku a odečti ji od svého čísla.
(ii) Vyděl číslo dvěma a dále pracuj s novým číslem.
(iii) Opakuj kroky (i) a (ii), dokud ti nezbude nula.

Cvičení. Převeďte čísla 7, 11, 38 a 325 do dvojkové soustavy.

Cvičení. Převeďte čísla $(1010)_2$, $(10111)_2$ a $(100101)_2$ do desítkové soustavy.

Nyní už známe vše potřebné k definici Nim-součtu. Abychom jej odlišili od klasického součtu, budeme namísto $+$ používat $\oplus$.

[12] Její podstatné vlastnosti ale zůstaly zachovány – nemůže se stát, že by jedno číslo mělo dva binární zápisy lišící se v cifře 1 na kterékoliv pozici.

Definice. (Nim-součet) *Nim-součtem* čísel $(x_m \dots x_0)_2$ a $(y_m \dots y_0)_2$ je číslo $(z_m \dots z_0)_2$ takové, že pro každé $k = 0, 1 \dots, m$ platí $z_k = x_k + y_k \pmod 2$, neboli $z_k = 1$, pokud $x_k + y_k = 1$, a $z_k = 0$ jinak. Píšeme

$$(x_m \dots x_0)_2 \oplus (y_m \dots y_0)_2 = (z_m \dots z_0)_2.$$

Poznámka. „Nim-sečíst" dvě čísla je vlastně velmi jednoduché – stejně jako v případě desítkového zápisu sčítáme číslice na odpovídajících si pozicích[13], ovšem pokud nám dílčí součet vyjde roven 2, nestaráme se na rozdíl od klasického sčítání o „přenos jednotky o řád výše".

Příklad. Nim-součtem $(11010)_2 \oplus (1010011)_2$ je číslo $(1001001)_2$. Tedy $26 \oplus 83 = 73$, neboť $(11010)_2 = 26$, $(1010011)_2 = 83$ a $(1001001)_2 = 73$.

Pro názornost si můžeme sčítance zapisovat pod sebe:

$$\begin{array}{r} 11010_2 \\ \oplus\ 1010011_2 \\ \hline 1001001_2. \end{array}$$

Tvrzení 1. *Pro Nim-součet libovolných tří nezáporných celých čísel x, y, z platí*

(i) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ *(asociativita),*
(ii) $x \oplus y = y \oplus x$ *(distributivita),*
(iii) $0 \oplus x = x$ *(neutrální prvek),*
(iv) $x \oplus x = 0$ *(opačný prvek),*
(v) $x \oplus y = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(jednoznačnost opačného prvku).*

Důkaz Tvrzení 1 jistě zvládnete sami – vše plyne přímo z definice Nim-součtu, pátý bod navíc z Tvrzení 2.

Díky vlastnosti (i) nezáleží na pořadí sčítání, a tedy přebytečné závorky budeme vynechávat. Bod (iv) znamená, že v Nim-sčítání je každý prvek opačný sám k sobě. Bod (v) budeme často mlčky využívat při hledání „vítězných" tahů (tahů vedoucích do P pozic).

Tvrzení 2. (Pravidlo krácení) *Pokud pro nezáporná celá čísla x, y, z platí $x \oplus y = x \oplus z$, potom nutně $y = z$.*

Důkaz. Přičtením x k oběma stranám rovnosti $x \oplus y = x \oplus z$ dostaneme $x \oplus x \oplus y = x \oplus x \oplus z$. Potom ze vztahů $x \oplus x = 0$, $0 \oplus y = y$ a $0 \oplus z = z$ (viz Tvrzení 1) už vyplývá $y = z$. ♣

Nyní již vše potřebné o dvojkové soustavě a Nim-sčítání známe, proto si to pojďme procvičit na pár příkladech a pak zpátky k teorii her.

Cvičení. Kolik je $41 \oplus 13$?

Cvičení. Kolik je $5 \oplus 14 \oplus 24$?

Cvičení. Nalezněte x, pro které platí $57 \oplus x = 42$.

Cvičení. Nalezněte x, pro které platí $x \oplus 7 \oplus 20 \oplus 25 = 10$.

Cvičení. Pro jaká x, y platí, že $x \oplus y = x + y$?

Jak vyhrát Nim

Následující větu dokázal v roce 1902 Charles L. Bouton. Na první pohled není jasné, jak spolu souvisí Nim a binární zápis čísel, ale nenechejte se tím zmást. Funguje to!

[13] V případě desítkového zápisu hovoříme o cifrách na místě jednotek, desítek, stovek atd. Analogicky by se v případě dvojkového zápisu dalo hovořit o cifrách na místě jednotek, dvojek, čtyřek, osmiček, …

Věta 3. (Bouton) *Ve hře Nim (viz Hra 34) s n hromádkami je pozice $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ prohrávající právě tehdy, když je Nim-součet jednotlivých hromádek roven nule, čili $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n = 0$.*

Důkaz. Označme si $\mathcal{P}$ množinu všech pozic, pro něž je Nim-součet jednotlivých hromádek nulový, a $\mathcal{V}$ množinu těch pozic, pro něj je Nim-součet hromádek nenulový.

Podle pravidel Nimu je jediná koncová pozice – $(0, 0, \dots, 0)$ – prohrávající. To je zcela v souladu s tím, že $0 \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0 = 0$, tedy pro koncové pozice tvrzení platí. Dále se budeme zabývat pouze nekoncovými pozicemi.

Potřebujeme tedy dokázat jednak to, že

(A) z každé pozice z $\mathcal{P}$ vedou přípustné tahy pouze do pozic typu $\mathcal{V}$ (což je charakteristika prohrávajících pozic – viz první díl seriálu)

a jednak to, že

(B) z každé pozice z $\mathcal{V}$ existuje alespoň jeden tah do nějaké pozice z $\mathcal{P}$ (což je pro změnu charakteristika vyhrávajících pozic).

Část (A): Mějme pozici $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ z množiny $\mathcal{P}$. Ve svém tahu si hráč vybere jednu z hromádek – bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že se rozhodne pro první hromádku, v opačném případě stačí přeznačit hromádky – a sníží v ní počet sirek na x'. Vzhledem k pravidlům musí odebrat alespoň jednu sirku, a tedy $x' < x_1$.

Kdyby výsledná pozice $(x', x_2, \dots, x_n)$ byla rovněž z množiny $\mathcal{P}$, platilo by

$$x' \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n = 0 = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$$

a podle Pravidla krácení (Tvrzení 2) by bylo $x' = x_1$. To je ovšem spor, pročež musí platit $x' \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n \neq 0$. Libovolný tah z pozice typu $\mathcal{P}$ tedy vede vždy do pozice typu $\mathcal{V}$.

Část (B): Mějme pozici $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ z množiny $\mathcal{V}$. Zapišme si čísla x_1 až x_n ve dvojkové soustavě pod sebe – tak, aby ve stejném sloupci byly odpovídající si řády. Jelikož je Nim-součet všech čísel nenulový, musí existovat sloupec, ve kterém je lichý počet jedniček. Z takových sloupců si vezměme ten nejvíc nalevo (což je sloupec odpovídající nejvýznamnější mocnině dvojky) a jedno z čísel, které má v tomto sloupci jedničku, změňme tak, aby byl počet jedniček v každém sloupci sudý. Tím jsme dané číslo určitě zmenšili, neboť změna na nejvýznamnější pozici (tedy na pozici odpovídající největší mocnině dvojky) byla z 1 na 0. Tudíž takový tah je podle pravidel a jedná se o tah do pozice z $\mathcal{P}$.

Tím jsme dokázali, že prohrávající pozice jsou právě ty, pro něž je Nim-součet jednotlivých hromádek nulový. ♣

Myšlenka důkazu. V zápisu velikostí hromádek ve dvojkové soustavě a hledání sloupců co nejvíc nalevo se správným počtem jedniček se může ztratit hlavní myšlenka důkazu. Zkusme se na ni podívat z trochu jiného úhlu.

Pokud hrajeme pouze se dvěma hromádkami, rozmysleli jsme si už, že prohrávající pozice jsou ty se stejně velkými hromádkami. Opět je za tím skryta myšlenka *párování a obarvování*, se kterou jsme se seznámili v předchozím díle – totiž mít na každý protivníkův tah protitah. Důležité v této části bylo to, že hromádky jsou dvě, což je sudé číslo.

Pokud hrajeme s více hromádkami, pak si každou z nich můžeme rozdělit na „podhromádky“ podle binárního zápisu (takže z hromádky o velikosti 11 uděláme tři menší o 1, 2 a 8 sirkách). V tuto chvíli odpovídají prohrávajícím pozicím opět právě ty, ve kterých se každý typ podhromádky vyskytuje „suděkrát“. Z vlastností zápisu čísla ve dvojkové soustavě plyne, že v každé hromádce je každý typ podhromádky zastoupen maximálně jednou – nemůže se tedy stát, že by hráč ve svém tahu odebral nenulový počet sirek z jedné hromádky a přitom nepozměnil „sudo-lichou bilanci“.

Neméně důležité je to, že podhromádku o velikosti 2^n umíme rozdělit na podhromádky o velikostech 1, 2 až 2^{n-1}, a ještě nám zbude jedna sirka, kterou beztak musíme ve svém tahu odebrat. Vybereme-li si tedy podhromádku s 2^n sirkami, můžeme jejím přeskupením změnit „sudo-lichou bilanci“ ve všech menších podhromádkách. ♡

Poznámka. Všimněme si jedné zajímavosti – počet možných tahů z V pozice do nějaké P pozice odpovídá počtu jedniček ve sloupci nejvíc nalevo s lichým počtem jedniček. To jinými slovy znamená, že z V pozice vede vždycky lichý počet vítězných tahů.

Poznámka. Díky právě dokázané větě můžeme nejen rychle určit, je-li daná pozice V, či P, ale také kýžený tah z V pozice do P pozice najít. Zkusme si to na příkladě.

Příklad. Je pozice $(12, 9, 8, 3)$ prohrávající? Pokud není, nalezněte tah vedoucí do P pozice.

Řešení. Spočtěme Nim-součet jednotlivých hromádek:

$$\begin{array}{r@{\,=\,}r} 12 & 1100_2 \\ 9 & 1001_2 \\ 8 & 1000_2 \\ 3 & 11_2 \\ \hline \oplus & 1110_2. \end{array}$$

Výsledek je nenulový, tedy se jedná o vyhrávající pozici. Teď potřebujeme najít nějaký vítězný tah, tedy změnit (zmenšit) jednu z hromádek tak, aby v binárním zápise byl v každém sloupci sudý počet jedniček. Jedním možným tahem je odebrání deseti sirek z první hromádky. Potom na ní totiž zbudou dvě sirky a Nim-součet pozice (2,9,8,3) je:

$$\begin{array}{r@{\,=\,}r} 2 & 10_2 \\ 9 & 1001_2 \\ 8 & 1000_2 \\ 3 & 11_2 \\ \hline \oplus & 0000_2. \end{array}$$

Podle předchozí věty existují ještě dva jiné tahy z $(12, 9, 8, 3)$ do nějaké P pozice – v prvním sloupci zleva jsou totiž tři jedničky. Ověřte, že odebráním dvou sirek ze třetí hromádky získáte P pozici. Jaký je třetí možný vítězný tah? ♠

Cvičení. Je pozice $(12, 19, 27)$ prohrávající? Pokud není, nalezněte všechny vítězné tahy (čili tahy vedoucí do P pozice).

Cvičení. Jak spolu souvisejí hry (a, b, c) a $(a, b, c, 10, 10)$ pro libovolná přirozená a, b, c?

Cvičení. Znáte-li už všechny pozice ve hře $(3, 5, 6)$ a nyní hrajete hru $(3, 5, 6, 9, 13, 21)$, je nutné rozebírat celou hru, nebo by stačilo zjistit, jak se hraje $(9, 13, 21)$ a „hrát každou hru zvlášť“? Fungovalo by to i v případě, že by pozice $(3, 5, 6)$ nebyla prohrávající?

Cvičení. Zahrajte si s někým Nim a trénujte hledání vítězných tahů.

Nim v převleku

Ve chvíli, kdy umíme hrát (a z každé vyhrávající pozice také skutečně vyhrát) Nim, umíme rázem hrát širokou škálu dalších her (alespoň teoreticky), neboť velká část konečných kombinatorických her se dá na Nim převést. Co to přesně znamená a jak se něco takového dokáže, si povíme v dalších kapitolách. Teď zkusme najít vyhrávající strategie v následujících hrách. Nápověda je jasná – alespoň zčásti je v nich ukrytý Nim.

Hra 35. (Želvy) V řadě za sebou stojí/leží n želv. Každá želva buď stojí, tedy je nahoru krunýřem – K, nebo je vzhůru nohama – N, například takto:

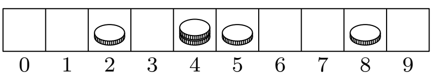
$$\begin{array}{cccccccccc} K & K & N & K & N & N & N & K & N & K \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

Dva hráči střídavě želvy obracejí. V jednom tahu si hráč vybere želvu, která je vzhůru nohama, obrátí ji nahoru krunýřem, a pokud chce, může ještě převrátit jednu libovolnou želvu nalevo od ní – ať už je nahoru krunýřem, nebo nohama. Hráč, který už nemůže převrátit žádnou želvu (všechny stojí na nohou), prohrál.

Řešení. Místo želvy ležící na n-tém místě nohama nahoru si můžeme představit hromádku o n mincích. Pozice na obrázku v tu chvíli odpovídá nimové pozici $(3, 5, 6, 7, 9)$, a tedy by měla být vyhrávající. Z této nimové pozice vede pouze jeden tah do prohrávající pozice – vzít dvě mince z poslední hromádky. Je v tom ale jeden háček. V Želvách je na každém políčku (každé velikosti hromádky) vždy právě jedna želva – nemůžeme mít dvě želvy vzhůru nohama, které by značily dvě hromádky o velikosti 7.

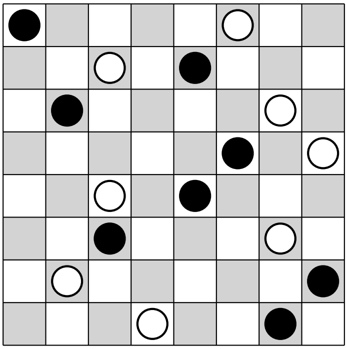
Naštěstí v Nimu platí, že jsou-li ve hře dvě hromádky stejné velikosti, hra se nezmění, pokud obě hromádky odstraníme. To nahlédneme snadno díky tomu, že Nim-součet dvou stejných čísel je roven nule, a tedy neovlivní, zda se jedná o V či P pozici. Případně si stačí uvědomit, že pokud soupeř sebere sirky z jedné ze stejných hromádek, můžeme sebrat stejný počet z druhé hromádky, čímž obě zmenšíme, ale zbytek hry tím neovlivníme. Tím pádem pokud nám taktika v klasickém Nimu radí „hromádku o velikosti m zmenši na hromádku o velikosti p“, bude naším tahem v Želvách „otoč želvu na m-té pozici krunýřem nahoru a dále otoč želvu na p-té pozici – bez ohledu na to, zda byla vzhůru krunýřem nebo nohama“. To jsou přesně tahy, které máme v Želvách povolené, tedy z výše uvedených důvodů hra dopadne stejně jako odpovídající Nim. ♠

Hra 36. Mějme pásek polí očíslovaných $0, 1, 2, 3, \ldots$ a na pásku konečné množství mincí. Každá mince je na nějakém políčku, přičemž na jednom políčku jich může být i více – třeba jako na obrázku.



Dva hráči se střídají v tazích. Ve svém tahu si hráč vybere nějakou minci a posune ji na libovolné pole nalevo od původního. S mincemi, které leží na nultém poli, už nejde hrát. Kdo nemůže táhnout, prohrál.

Hra 37. (Northcott) Northcottova hra se hraje na šachovnici, na jejímž každém řádku je umístěný právě jeden bílý kámen a právě jeden černý kámen. Dva kameny nikdy nesmějí ležet na stejném poli. Jedna z možných pozic je na obrázku.



Dva hráči – Bílý a Černý – se pravidelně střídají v tazích. Hráč, který je na tahu, pohne jedním svým kamenem o libovolný počet polí doprava nebo doleva, přičemž nesmí opustit šachovnici ani přeskočit soupeřův kámen. Kdo nemůže hrát, prohrál.

Poznámka. Northcottova hra sice není konečná, ale přesto má jeden z hráčů vyhrávající strategii.

Hra 38. (Mizerný Nim) Hraje se stejně jako klasický Nim s jedinou změnou – hráč, který nemůže táhnout, vyhrál.

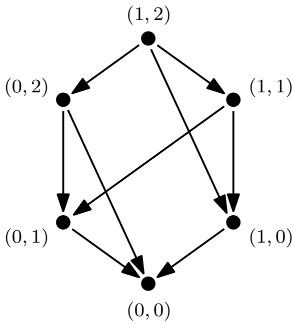
Hra 39. (Nim_k) Mějme pevně dané číslo k. Hra je podobná jako Nim – na stole je n hromádek sirek, dva hráči z nich střídavě odebírají. Tentokrát smí ale hráč ve svém tahu odebrat sirky z až k různých hromádek. Z každé hromádky může vzít libovolné množství, celkem však musí odebrat alespoň jednu sirku.

Poznámka. Tuto variantu Nimu vymyslel v roce 1910 Eliakim Hastings Moore. Pro $k = 1$ se jedná o klasický Nim.

Podobně jako v případě klasického Nimu se pro Nim_k dá dokázat, že pozice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je prohrávající právě tehdy, když v binárním zápise čísel x_1, x_2, ..., x_n pod sebe je počet jedniček v každém sloupci dělitelný $k + 1$. Zkuste to dokázat!

Sprague-Grundyho funkce

Tahy a pozice v konečné kombinatorické hře si můžeme nakreslit jako „puntíky" a odpovídající „šipky" mezi nimi. Například pro Nim $(1, 2)$ dostaneme následující schéma.



Takovému rozkreslení říkáme *graf hry*[14], ony „puntíky" nazýváme *vrcholy*, „šipky" určující možné tahy nazýváme *orientované hrany*. *Následníky* vrcholu p rozumíme všechny vrcholy, do kterých

[14]Nepleťte si graf hry s grafem funkce, jedná se o zcela odlišný pojem. Grafy (těmi, co nejsou grafy funkce) se dokonce zabývá celé odvětví matematiky – teorie grafů.

vede z p hrana (čili všechny pozice, do kterých se lze z pozice p dostat jedním tahem). Množinu následníků vrcholu (pozice) p budeme značit $N(p)$. Pro koncové pozice je $N(\cdot)$ prázdná množina.

Na konečnou kombinatorickou hru se tedy můžeme dívat i jako na dvojici (X, N), kde X je množina všech pozic a N funkce přiřazující pozici její následníky (přesně podle pravidel hry). Nyní už nám nic nebrání v definování Sprague-Grundyho funkce.

Definice. *Sprague-Grundyho funkce* hry (X, N) je funkce g přiřazující pozici $p \in X$ nejmenší celé nezáporné číslo, které není Sprague-Grundyho hodnotou žádného z jejích následníků, neboli

$$g(p) = \min\{n \geq 0 : n \in \mathbb{Z}, n \neq g(x) \text{ pro } x \in N(p)\}.$$

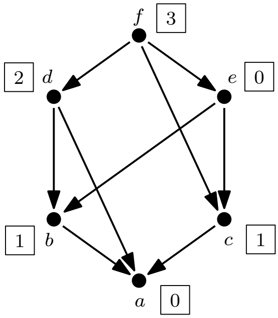
Namísto celého Sprague-Grundy budeme pro zkrácení psát často jen SG.

Stejně jako v případě V a P pozic definujeme hodnoty SG funkce „od konce“. Pokud už pro nějakou pozici známe hodnotu SG funkce všech jejích následníků, můžeme určit i její SG hodnotu. SG hodnota koncových pozic je z definice nulová.

Ještě poznamenejme, že v grafu konečné hry se zjevně nemohou vyskytovat žádné „cykly“ – jakmile jednou pozici opustíme, už se do ní nikdy nemůžeme vrátit.

Příklad. Nalezněte SG funkci pro Nim s počáteční pozicí $(1, 2)$.

Řešení. Máme-li hledat SG funkci a graf hry není příliš rozsáhlý, je nejjednodušší si ho nakreslit a přesně podle definice postupovat od koncových vrcholů dál. Graf je shodný s grafem v úvodu kapitoly, pouze vynecháme popisky a budeme k vrcholům připisovat hodnoty SG funkce. Koneckonců, máme-li graf hry, nepotřebujeme vlastně vědět, ze které hry vznikl – všechny podstatné informace jsou v něm zanesené.



Koncový vrchol je jediný – a – a má SG hodnotu 0. Pro vrcholy b a c platí, že a je jejich jediný následník, tedy můžeme určit i jejich SG hodnotu: $g(b) = g(c) = 1$. Vrchol d má za následníky vrchol a s SG hodnotou 0 a vrchol b s SG hodnotou 1, tedy $g(d) = 2$. Vrchol e má rovněž dva následníky – b a c, tentokrát je ale $g(b) = g(c) = 1$, a tudíž $g(e) = 0$. Nakonec vrchol f má za následníky c ($g(c) = 1$), d ($g(d) = 2$) a e ($g(e) = 0$), a tím pádem $g(f) = 3$. ♠

Cvičení. Nalezněte SG funkci pro Nim o jedné hromádce velikosti n.

Definice. O kombinatorické hře řekneme, že je *progresivně omezená*, pokud existuje takové přirozené číslo m, že každá hra skončí nejvýše po m tazích bez ohledu na to, jak hráči hrají.

Je zřejmé, že nekonečné hry progresivně omezené nejsou. Existují ale i konečné hry, které nejsou progresivně omezené – například ta následující. Nedejte se zmást tím, že pokud bude chtít druhý hráč vyhrát, může hru ukončit ve chvíli, kdy se poprvé dostane na tah. V definici progresivní omezenosti nezohledňujeme to, jak „může být hra rychlá“, nýbrž „jak může být pomalá“.

Hra 40. (Nim$^{\infty}$) První hráč ve svém prvním tahu zvolí přirozené číslo n. Poté se hraje klasický Nim s jednou hromádkou o n sirkách.

V tomto díle seriálu se budeme dále zabývat jen hrami, které progresivně omezené jsou. Nim mezi ně zjevně patří – pro počáteční pozici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ skončí každá partie nejpozději po $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ tazích, jelikož každým tahem ubude minimálně jedna sirka.

A proč nás zajímají pouze progresivně omezené hry? Protože **pro každou progresivně omezenou hru existuje SG funkce, a navíc je jednoznačně určena!** Dokázat to není těžké – hodnoty SG funkce definujeme od koncových pozic a díky progresivní omezenosti budou mít všechny pozice konečnou hodnotu.

Pokud hra není progresivně omezená, SG funkce pro ni existovat může, nicméně teorie kolem jejího zavedení je o něco složitější a my se jí v seriálu věnovat nebudeme.

Definice. Hrám, ve kterých prohrává hráč nemající tah (neboli všechny koncové pozice jsou prohrávající) říkáme *normální* (anglicky *under the normal play rule*). Pokud naopak hráč nemající tah vyhrává (koncové pozice jsou vyhrávající) nazýváme hru *mizernou* či *misère* (anglicky *under the misère play rule*).

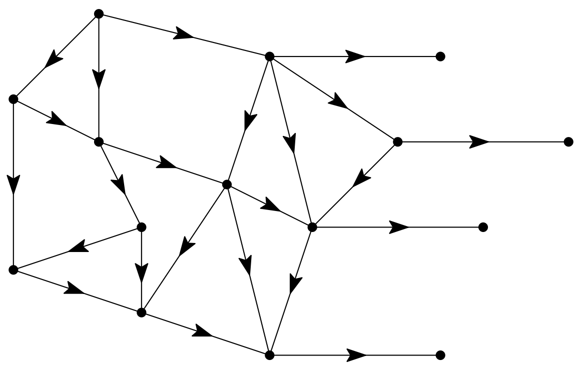
Pozorování. Pro normální hru platí, že prohrávající pozice přesně odpovídají pozicím, ve kterých je SG funkce nulová.

Důkaz. Stačí ověřit, že z každé pozice s nulovou SG hodnotou vedou tahy pouze do pozic s kladnou SG hodnotou a že z každé pozice s kladnou SG hodnotu vede alespoň jeden tah do pozice s nulovou SG hodnotou. Ale to plyne přímo z definice SG funkce! ♣

Pro progresivně omezené normální hry se nám tedy pomocí SG funkce podařilo přiřadit každé pozici nezáporné celé číslo, přičemž kladným hodnotám odpovídají V pozice a nulovým P pozice. Může se zdát, že jsme odvedli nezanedbatelný kus práce a přitom zavedením SG funkce nezískali nic nového. Nenechejte se mýlit – právě SG funkce nám v následující kapitole umožní hry sčítat.

Cvičení. Nalezněte SG funkci pro Hru 2 z minulého dílu seriálu (na stole je 15 sirek, hráči střídající se v tazích mohou odebrat 1 až 4 sirky, kdo nemůže táhnout, prohrál).

Cvičení. Nalezněte SG funkci pro hru s následujícím grafem:



Sčítání her

Součet her zavedeme pouze pro progresivně omezené normální kombinatorické hry. Pro takové hry totiž existuje jednoznačná SG funkce taková, že prohrávajícím pozicím odpovídají právě pozice s nulovou SG hodnotou – viz výše.

Vybudovat teorii pro mizerné hry je mnohem obtížnější. Občas je sice možné řešení mizerné varianty převést jen s malými změnami na řešení normální varianty (to platí například pro příznačně pojmenovaný Mizerný Nim (viz Hra 38)), mnohdy je ale převedení obtížné, či dokonce dosud není známé.

Až do konce tohoto dílu tedy budeme hrou vždy rozumět progresivně omezenou normální kombinatorickou hru, aniž bychom to explicitně vypisovali. Nejdřív jedna formální definice:[15]

Definice. Mějme n her H_1 až H_n ve formě grafu, tedy $H_1 = (X_1, N_1)$, $H_2 = (X_2, N_2)$, ... , $H_n = (X_n, N_n)$. *Součtem her* H_1 *až* H_n je taková hra $H = (X, N)$, pro kterou

(A) množina všech jejích vrcholů je kartézský součin $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, čili množina všech uspořádaných n-tic $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, ... , $x_n \in X_n$,

(B) následníci vrcholu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ jsou prvky množiny

$$\begin{aligned} N(x) = N(x_1, x_2, \ldots, x_n) = & \, N_1(x_1) \times \{x_2\} \times \cdots \times \{x_n\} \\ & \cup \{x_1\} \times N_2(x_2) \times \cdots \times \{x_n\} \\ & \cup \cdots \\ & \cup \{x_1\} \times \{x_2\} \times \cdots \times N_n(x_n). \end{aligned}$$

Součet her značíme také $H = H_1 + H_2 + \cdots + H_n$.

Jak si předchozí definici vyložit? Součtem n her je jedna nová hra – její pozice jsou všechny možné n-tice pozic z původních her (vždy takové, že v první složce je nějaká pozice z první hry, ve druhé z druhé, ... a v poslední složce je nějaká pozice z n-té hry). Tah v součtu her sestává z výběru jedné hry, ve které chceme zrovna hrát, a v zahrání tahu podle jejích pravidel. Následníky pozice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jsou tedy všechny pozice, které se od x liší pouze v jedné (i-té) složce, a to tak, že pokud se hráč rozhodl hrát ve hře $H_i = (X_i, N_i)$, je $\bar{x}_i$ následníkem pozice x_i.

Součet pěti her si můžeme představit také tak, že mezi námi a protihráčem je pět stolů a na každém jedna hra, přičemž se v každém tahu rozhodneme, na kterém stole zrovna chceme hrát (stejně svobodně se rozhoduje i soupeř – obecně ho nic nenutí „odpovídat“ na náš tah tahem na stejném stole).

Poznámka. Jsou-li všechny hry H_1 až H_n normální a progresivně omezené, je jejich součet rovněž normální a progresivně omezený. Normálnost nahlédneme snadno – prohrává právě ten, kdo nemůže udělat tah, čili nemůže udělat tah ani v jedné hře.

Pokud hra H_1 skončí nejvýše po m_1 tazích, hra H_2 nejvýše po m_2 tazích, ... , pak hra $H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ skončí nejvýše po $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ tazích, tudíž je progresivně omezená.

Příklad. Na Nim s n hromádkami $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ můžeme nahlížet jako na součet n Nimů s jednou hromádkou postupně o velikosti (x_1) až (x_n). Z toho je patrné, že ačkoliv jednotlivé hry mohou být triviální (nad tím, jak vyhrát jednohromádkový Nim, není třeba se nějak zvlášť zamýšlet), jejich součet může být výrazně komplikovanější.

Následující věta nám umožní zjišťovat *SG* funkci součtu her. Myšlenka je jednoduchá – *SG* funkce součtu her je Nim-součet *SG* funkcí jednotlivých částí. Připomeňme, že Nim-součet značíme symbolem $\oplus$.

Důkaz je podobný důkazu Věty 3. Pro zdárné řešení seriálových úloh není nutné mu porozumět, nicméně samozřejmě pomáhá hlubšímu pochopení toho, „o co vlastně v teorii her kráčí“.

Věta 4. *(Sprague-Grundy) Buď g_i SG funkce hry H_i pro $i = 1, \ldots, n$. Potom součet her $H = H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ má SG funkci*

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n).$$

Důkaz. Buď $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ libovolná pozice ve hře H. Označme $b = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n)$. Potřebujeme ověřit následující dvě vlastnosti funkce $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

(A) Pro každé nezáporné celé číslo $a < b$ existuje následník y pozice x, pro nějž $g(y) = a$.

(B) Neexistuje následník pozice x, v němž by funkce g nabývala hodnoty b.

[15] Pokud je pro Tebe následující matematický zápis neznámý, nezoufej, za formální definicí následuje slovní popis a její vysvětlení.

Potom totiž SG hodnota pozice x musí být z definice SG funkce rovna b.
Část (A): Označme $d = a \oplus b$. Jelikož $a < b$, je d nenulové. Označme k počet cifer v binárním zápisu d (tedy d má první cifru 1 na k-té pozici zprava). Proto, jelikož $a < b$, má b v binárním zápisu na k-té pozici zprava cifru 1 a a cifru 0.

Dále jelikož $b = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n)$, tak přinejmenším pro jedno x_i platí, že $g_i(x_i)$ má v binárním zápisu na k-té pozici zprava cifru 1. Pro jednoduchost předpokládejme, že to platí pro $i = 1$. Tím pádem $d \oplus g_1(x_1) < g_1(x_1)$, a jelikož g_1 je SG funkce, musí existovat tah ve hře H_1 z pozice x_1 do nějaké pozice $\bar{x}_1$, pro kterou je $g_1(\bar{x}_1) = d \oplus g_1(x_1)$.

V takovém případě je tah z $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ do $(\bar{x}_1, x_2, \ldots, x_n)$ legálním tahem ve hře H a platí

$$g_1(\bar{x}_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n) = d \oplus g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n) = d \oplus b = a.$$

Část (B): Pro spor předpokládejme, že ve hře H existuje následník $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, v němž má funkce g stejnou hodnotu. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že tah proběhl v první hře, tedy že $(\bar{x}_1, x_2, \ldots, x_n)$ je následníkem $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a přitom

$$g_1(\bar{x}_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n) = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n).$$

Z Pravidla krácení (Tvrzení 2) ovšem plyne $g_1(\bar{x}_1) = g_1(x_1)$, což je spor, neboť g_1 je SG funkce hry H_1 a jako taková nemůže nabývat stejné hodnoty zároveň v některé pozici a v jejím následníkovi.
♣

Uvědomme si, co z právě dokázané věty plyne – každá progresivně omezená normální hra, pokud ji uvažujeme jako součást součtu her, se chová jako nějaká nimová „hromádka“. Jinými slovy, každou takovou hru můžeme nahradit nimovou hromádkou se stejným počtem sirek, jako byla hodnota SG funkce, aniž bychom změnili výsledek. Díky tomu můžeme formulovat následující zajímavý závěr:

Důsledek. Každá progresivně omezená normální hra je ekvivalentní nějaké nimové hromádce.

Cvičení. Pokud jste ne(vy)řešili druhé a třetí cvičení v kapitole Jak vyhrát Nim, zkuste je teď.

Hra 41. Na stole je hromádka n sirek, dva hráči se střídají v tazích. V jednom tahu lze z hromádky odebrat buď libovolný sudý počet sirek, ne však celou hromádku, nebo všechny sirky, pokud jich je lichý počet. Kdo nemůže táhnout, prohrál.

Řešení. Ve hře jsou dvě koncové pozice – 0 a 2. Spočítejme indukcí SG funkci pro malá n.

x	0	1	2	3	5	5	6	7	8	9	10	11	12
$g(x)$	0	1	0	2	1	3	2	4	3	5	4	6	5

Zdá se, že $g(2k) = k - 1$ a $g(2k - 1) = k$ pro všechna celá $k \geq 1$. Dokažme to pořádně.

Pozice 0 a 2 jsou koncové pozice v normální hře, tudíž $g(0) = g(2) = 0$. Hodnoty SG funkce odvodíme pomocí matematické indukce, zvlášť pro liché a sudé pozice.

Předpokládejme tedy, že hodnoty g odpovídají našemu pozorování až do pozice $2k - 2$ včetně.

Z pozice $2k$ vedou tahy do všech sudých pozic s menším počtem sirek (s výjimkou 0) a dle definice

$$\begin{aligned} g(2k) &= \min\{n \geq 0 : n \in \mathbb{Z}, n \neq g(x) \text{ pro } x \in N(2k)\} = \\ &= \min\{n \geq 0 : n \in \mathbb{Z}, n \neq g(x) \text{ pro } x \in \{2, 4, 6, \ldots, 2k-2\}\} = \\ &= \min\{n \geq 0 : n \in \mathbb{Z}, n \neq g(2m) \text{ pro } m = 1, 2, \ldots, k-1\} = \\ &= \min\{n \geq 0 : n \in \mathbb{Z}, n \neq m - 1 \text{ pro } m = 1, 2, \ldots, k-1\} = \\ &= k - 1, \end{aligned}$$

kde jsme při přechodu mezi třetím a čtvrtým řádkem využili indukčního předpokladu.

Z pozice $2k-1$ vedou tahy jednak do všech lichých pozic s menším počtem sirek a jednak do pozice 0. Podle definice tedy

$$\begin{aligned} g(2k-1) &= \min\{n \geq 0 : n \in \mathbb{Z}, n \neq g(x) \text{ pro } x \in N(2k-1)\} = \\ &= \min\{n \geq 0 : n \in \mathbb{Z}, n \neq g(x) \text{ pro } x \in \{0, 1, 3, 5, \ldots, 2k-3\}\} = \\ &= \min\{n \geq 0 : n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \text{ a } n \neq g(2m-1) \text{ pro } m = 1, 2, \ldots, k-1\} = \\ &= \min\{n > 0 : n \in \mathbb{Z}, n \neq m \text{ pro } m = 1, 2, \ldots, k-1\} = \\ &= k, \end{aligned}$$

kde jsme při přechodu mezi třetím a čtvrtým řádkem opět využili indukčního předpokladu.

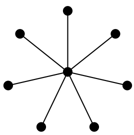
Náš předpoklad byl tedy správný a skutečně pro SG funkci této hry platí $g(2k) = k-1$, $g(2k-1) = k$ pro všechna celá $k \geq 1$ a $g(0) = 0$. ♠

Cvičení. Nalezněte SG funkce (a tím pádem i vyhrávající strategie) v následujících hrách – pokud ne pro celou hru, tak alespoň pro malá n. Všechny hry jsou normální, neboli kdo nemůže táhnout, prohrál. Nezapomeňte rovněž, že nestačí „myslet si", jak SG funkce vypadá – je třeba to i správně odůvodnit (dokázat).

Hra 42. Na stole je několik hromádek sirek. V jednom tahu lze odebrat libovolný sudý počet sirek z jedné hromádky, nebo libovolnou hromádku, na které už je jen jedna sirka.

Hra 43. Na stole je několik hromádek sirek. V jednom tahu lze buď odebrat libovolné množství sirek z jedné hromádky, nebo jednu hromádku rozdělit na dvě neprázdné hromádky (v takovém případě hráč žádné sirky nebere).

Hra 44. (Vločka) Hra začíná s vločkou V_n o n ramenech – na obrázku je vločka se sedmi rameny.



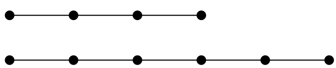
V_7

Jedná se vlastně o graf na $n+1$ vrcholech. V jednom tahu hráč smaže jeden vrchol a všechny hrany s ním spojené. V každém tahu musí být smazána alespoň jedna hrana, čili nelze smazat vrchol, který již není „spojený" s žádným jiným.

Hra 45. (Cesta) Hra je stejná jako ta předchozí, ale počátečním grafem není vločka, nýbrž cesta C_n, což je $n+1$ vrcholů pospojovaných „za sebou" n hranami. Na obrázku je příklad cest C_3 a C_5.

C_3

C_5



Obdobně lze hrát další hry – vymýšlení nových a kombinování starých se meze nekladou!

Seriál – Teorie her III

V tomto díle opustíme koncept kombinatorických her, které jsme zkoumali doteď, a pustíme se do další velké skupiny – říkejme jí pracovně „maticové hry“. Hlavní rozdíl bude v tom, že zatímco v kombinatorických hrách se hráči pravidelně střídali v tazích, v maticových hrách táhnou oba/všichni hráči současně. Musíme tedy nějak odhadnout, jak bude hrát náš protihráč, přičemž v úvahu samozřejmě bereme i to, že protihráč zároveň uvažuje, jaký je nejvýhodnější tah pro nás v reakci na jeho námi očekávaný tah, a tak pořád dokola. Nebojte, z tohoto bludného kruhu se dá dostat. (-: Podotkněme ještě, že dělení na kombinatorické, maticové a další typy her není nijak striktní.

Matematizace reálného světa

Jak jsme si krátce nastínili v úvodu prvního dílu, teorie her se zabývá rozhodováním v konfliktních situacích. Pro každého hráče se snaží najít tu nejlepší strategii – postup, kterým dosáhne co nejlepšího výsledku. V předchozích dílech bylo jasné, co je oním kýženým výsledkem: vyhrát.

Pokud se chceme přiblížit popisu reálného světa a konfliktních situací v něm, musíme se nějak vypořádat s tím, co pro jednotlivé hráče znamená *dobrý*, potažmo *nejlepší* výsledek. Jelikož v matematice se špatně pracuje s výroky „vyhrát dvě hrušky je o trochu lepší, než vyhrát jedno jablko, a o hodně lepší, než vyhrát kokos“, ohodnotíme si všechny možné výsledky herní situace reálnými čísly tak, aby preferovanější výsledek měl větší číslo (hodnotu) než méně preferovaný. Pokud je pro hráče výsledek negativní, ohodnotíme ho záporným číslem. Vždyť ztráta je vlastně záporná výhra. Pokud by se jednalo například o sázky, mohli bychom za ohodnocení vzít přímo počet vyhraných nebo prohraných korun.

Stejný výsledek ale může mít pro různé hráče různou hodnotu. Uvažme hru, ve které lze vyhrát jednu ze tří cen:

(i) víkend v Paříži,
(ii) víkend na Havaji,
(iii) osm hodin v zubařském křesle.

Osoba zajímající se o francouzskou kulturu by mohla možné výhry ohodnotit postupně 100, 25 a -100 „body“. Naopak pro vášnivého surfaře mohou mít výhry cenu postupně 10, 100 a -100.

Důležité je, že ve všech hrách (alespoň v těch, kterými se budeme zabývat) předpokládáme, že pro každého hráče známe jeho numerické ohodnocení všech možných výsledků.

Další úskalí, které nás v matematizaci reálné situace čeká, je ujasnit si, co znamená, že je jeden tah lepší než druhý. Chtělo by se říci, že „to je přece jasné, lepší je ten tah, který povede k hodnotnějšímu výsledku“, ale tak jednoduché jako v kombinatorických hrách to není. Velikou výhodou kombinatorických her je totiž pravidlo, že hráči táhnou postupně, a pokud mají dostatečnou výpočetní kapacitu na to, aby hru zanalyzovali až do konce, nic jim nebrání ve volbě toho tahu, který k nejhodnotnějšímu výsledku skutečně povede. V maticových hrách je nicméně situace odlišná – o svém tahu se rozhodujeme ve chvíli, kdy neznáme tahy ostatních hráčů a naopak oni neznají náš. Může se potom stát, že strategie, která je v jistém smyslu nejrozumnější, vede k výsledku, který není nejlepší (a dokonce existuje výsledek, který je ostře lepší pro všechny hráče zároveň).

Příkladem budiž vězňovo dilema, ke kterému se dostaneme na závěr.

Hry v normálním tvaru

Až do konce seriálu se budeme zabývat tzv. hrami v normálním tvaru. Formální definici uvedeme na konci této kapitoly, nyní se seznamme s potřebnými pojmy.

Mějme nějakou konfliktní situaci pro n hráčů, tedy hru. *Strategií* hráče budeme rozumět jednu konkrétní volbu, jak se v dané situaci zachovat.[16] Množinu všech strategií n-tého hráče budeme obecně značit S_n. V případě her dvou hráčů budeme množiny strategií značit S a T. V celém seriálu budeme uvažovat pouze konečné množiny strategií.

Pro každého hráče rovněž potřebujeme znát *výplatní funkci* u_k – funkci, která k-tému hráči přiřadí jeho *výplatu* (ono subjektivní ohodnocení výsledku z povídání o matematizaci reálného světa) v závislosti na tom, jaké strategie jednotliví hráči zvolili. Pokud první hráč zvolil strategii $s_1 \in S_1$, druhý $s_2 \in S_2$, ... , n-tý $s_n \in S_n$, zapisujeme hodnotu výplatní funkce jako $u_k(s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

V případě hry dvou hráčů můžeme výplatní funkci pro každého z nich přehledně zaznamenat do *výplatní matice*.[17] Zapisujeme hru vždy tak, že první hráč svojí volbou určuje řádky, druhý hráč sloupce. Výslednou výplatní funkci pak vyčteme z příslušné kolonky.

Pro kratší zápis se na chvíli omezme na případ, kdy první hráč má pouze dvě možné strategie ($S = \{s_1, s_2))$ a druhý hráč tři ($T = \{t_1, t_2, t_3\}$). Výplatní matici prvního hráče budeme značit A_1, výplatní matici druhého A_2. Píšeme tedy:

$$\begin{array}{cccc} A_1 & t_1 & t_2 & t_3 \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} u_1(s_1,t_1) & u_1(s_1,t_2) & u_1(s_1,t_3) \\ u_1(s_2,t_1) & u_1(s_2,t_2) & u_1(s_2,t_3) \end{pmatrix}} \end{array}, \qquad \begin{array}{cccc} A_2 & t_1 & t_2 & t_3 \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} u_2(s_1,t_1) & u_2(s_1,t_2) & u_2(s_1,t_3) \\ u_2(s_2,t_1) & u_2(s_2,t_2) & u_2(s_2,t_3) \end{pmatrix}} \end{array}.$$

Chceme-li ušetřit ještě více místa, můžeme použít *výplatní dvojmatici* A. Známe-li konkrétní hodnoty výplatních funkcí, je dvojmaticí A, resp. dvojicí matic A_1, A_2 určena celá hra.

$$\begin{array}{cccc} A & t_1 & t_2 & t_3 \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} (u_1(s_1,t_1),\ u_2(s_1,t_1)) & (u_1(s_1,t_2),\ u_2(s_1,t_2)) & (u_1(s_1,t_3),\ u_2(s_1,t_3)) \\ (u_1(s_2,t_1),\ u_2(s_2,t_1)) & (u_1(s_2,t_2),\ u_2(s_2,t_2)) & (u_1(s_2,t_3),\ u_2(s_2,t_3)) \end{pmatrix}} \end{array}.$$

Při zápisu pomocí (dvoj)matice budeme občas vynechávat první řádek a první sloupec, neboť jde v podstatě pouze o pojmenování strategií – podstatná informace je v samotném „těle“ (dvoj)matice.

Osvětleme si právě zavedené pojmy na konkrétním příkladu:

Příklad 46. Ve hře kámen-nůžky-papír (KNP) je strategií prvního hráče například volba hrát kámen. Množinou strategií prvního hráče je množina $S_1 = \{\text{kámen}, \text{nůžky}, \text{papír}\}$. Množina strategií každého dalšího hráče je v KNP stejná jako pro prvního hráče, neboli $S_1 = \{\text{kámen}, \text{nůžky}, \text{papír}\}$.

Pokud KNP hrají dva hráči a dohodli se, že v případě vítězství dostane výherce od poraženého pětikorunu, je výplatní funkce prvního hráče $u_1(\text{kámen, nůžky}) = 5$, $u_1(\text{kámen, papír}) = -5$, $u_1(\text{kámen, kámen}) = 0$ a tak dále. Výplatní matice A_1, A_2, resp. výplatní dvojmatice A jsou o pár řádků níže. Připomeňme ještě, že strategie prvního hráče jsou uvedeny v levém sloupci a strategie druhého hráče v prvním řádku. Ve dvojmatici je výplata prvního hráče na prvním místě a výplata

[16] Pozor, nepleťte si tento pojem s pojmem vyhrávající/prohrávající strategie v kombinatorických hrách. V kombinatorických hrách byl strategií míněn celý **soubor** na sebe navazujících tahů.

[17] Pokud znáte pojem matice z lineární algebry, na chvíli na něj zapomeňte. Matice v našem pojetí je jen lepší název pro tabulku.

druhého na druhém.

$$\begin{array}{cc} A_1 & \begin{array}{ccc} \text{K} & \text{N} & \text{P} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{K} \\ \text{N} \\ \text{P} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ -5 & 0 & 5 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} A_2 & \begin{array}{ccc} \text{K} & \text{N} & \text{P} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{K} \\ \text{N} \\ \text{P} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 5 & 0 & -5 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} A & \begin{array}{ccc} \text{K} & \text{N} & \text{P} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{K} \\ \text{N} \\ \text{P} \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0) & (5,-5) & (-5,5) \\ (-5,5) & (0,0) & (5,-5) \\ (5,-5) & (-5,5) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Nyní už můžeme přistoupit k formální definici hry v normálním tvaru.

Definice. Mějme množinu n hráčů Q, množiny jejich strategií $S_1, S_2, \dots, S_n$ a jejich výplatní funkce $u_1, u_2, \dots, u_n$, což jsou reálné funkce definované na kartézském součinu $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$. *Hrou n hráčů v normálním tvaru* rozumíme uspořádanou $(2n+1)$-tici

$$(Q, S_1, S_2, \dots, S_n, u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Jak si jistě umíte představit, pod takto obecnou definici lze pojmout velmi širokou škálu rozhodovacích situací. Tak se pojďme alespoň s částí z nich vypořádat!

Hry s nulovým součtem

Připomeňme, že ve hře dvou hráčů v normálním tvaru značíme množiny strategií postupně S, T a výplatní funkce u_1, u_2. Hráče pojmenujeme I a II.

Definice. *Hra s nulovým součtem* je hra dvou hráčů v normálním tvaru, pro kterou navíc platí, že pro každou strategii $s \in S$ a každou strategii $t \in T$ je $u_1(s,t) = -u_2(s,t)$, neboli ve všech případech je výhra jednoho hráče ztrátou druhého.

Výplatní matice A_1, A_2 se v takovém případě liší pouze „přenásobením -1“, stačí nám tedy znát například pouze výplatní matici A_1. Musíme si však dát pozor a nezapomenout, že „zisky“ druhého hráče jsou s opačným znaménkem.

Dohodněme se, že pokud budeme mít hru zadanou maticí, nikoliv dvojmaticí, bude to automaticky znamenat, že se jedná o hru s nulovým součtem a že zadaná matice je výplatní maticí pro hráče I.

Mezi hry s nulovým součtem patří například kámen-nůžky-papír z Příkladu 1, stejně jako hra následující.

Hra 46. (Lichý a Sudý) Hráči Lichý a Sudý ve stejný okamžik vyřknou buď číslo jedna, nebo číslo dva. Lichý zvítězí, pokud součet vyřčených čísel bude lichý, Sudý zvítězí, pokud bude sudý. Poražený vyplatí vítězi součet obou čísel v korunách.

Jeden z hráčů je v této hře ve výhodnější pozici. Uhodnete, který?

Řešení. Zjevně se jedná o hru s nulovým součtem. Matice hry A (tedy výplatní matice prvního hráče) je

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} -2 & +3 \\ +3 & -4 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Analyzujme hru z pohledu Lichého. Nechť v opakované hře hraje náhodně „1“ ve 3/5 případů a „2“ ve 2/5 případů. Tím pádem:

(a) Pokud Sudý hraje „1“, Lichý prohraje 2 koruny ve 3/5 případů a naopak vyhraje 3 koruny ve 2/5 případů. Jeho průměrný zisk je $-2(3/5)+3(2/5) = 0$. Tudíž bude-li se hra opakovat dostatečný počet krát (a Sudý hrát stále „1“), Lichý v průměru nic nezíská ani neztratí.

(b) Pokud Sudý hraje „2“, Lichý s pravděpodobností 3/5 vyhraje 3 koruny a s pravděpodobností 2/5 vyhraje -4 koruny. Jeho *očekávaná* průměrná výplata je tedy $3(3/5) - 4(2/5) = 1/5$.

Vidíme, že pokud Lichý bude náhodně volit mezi strategiemi „1“ a „2“ v poměru 3 : 2, zajistí si tím, že v průměru nebude ve ztrátě (dokonce může být v plusu, bude-li Sudý hrát často „2“). Může si Lichý zajistit ještě lepší *očekávaný* výsledek?

Zkusme najít takovou pravděpodobnost $p \in [0,1]$, že pokud Lichý bude hrát „1“ s pravděpodobností p a „2“ s pravděpodobností $1-p$, bude jeho očekávaná výhra stejná bez ohledu na to, zahraje-li Sudý „1“, nebo „2“. Pro takové p by tedy mělo platit:

$$-2p + 3(1-p) = 3p - 4(1-p),$$
$$12p = 7.$$

Tudíž bude-li Lichý náhodně hrát „1“ s pravděpodobností 7/12 a „2“ s pravděpodobností 5/12, vyhraje v průměru $-2(7/12) + 3(5/12) = 1/12$ koruny bez ohledu na to, jak se zachová Sudý. Vidíme, že hra je výhodná pro Lichého.

Může si Lichý zaručit ještě lepší průměrný zisk než 1/12 koruny na hru? Nikoliv, pokud druhý hráč hraje racionálně.[18] Zopakujme pro Sudého stejný postup, jaký jsme použili pro Lichého: Hledáme pravděpodobnost $q \in [0,1]$ tak, aby průměrný zisk Sudého nezávisel na volbě Lichého. Buď si uvědomíme, že ze symetrie hry musí q vyjít rovněž 7/12, nebo stejně jako předtím můžeme vyřešit rovnici:

$$2q - 3(1-q) = -3q + 4(1-q),$$
$$12q = 7.$$

Bude-li Sudý náhodně volit mezi „1“ a „2“ v poměru 7 : 5, jeho průměrný zisk bude $2(7/12) - 3(5/12) = -1/12$ koruny.

Z toho už přímo vyplývá, že jelikož si Lichý uvedeným postupem umí zaručit průměrný zisk alespoň 1/12 a Sudý průměrný zisk nanejvýš $-1/12$ (což odpovídá minus zisku Lichého), nemůže si ani jeden z nich očekávaný zisk vylepšit. ♠

Motivováni příkladem zavedeme několik nových pojmů.

Definice. Ve hře s nulovým součtem mějme množinu strategií $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ prvního hráče. Prvkům S se říká *ryzí strategie*, zatímco strategie, která pro danou m-tici čísel $p_1, p_2, \dots, p_m$, $p_i \in [0,1]$, $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$, náhodně volí strategii s_1 s pravděpodobností p_1, strategii s_2 s pravděpodobností p_2, … , strategii s_m s pravděpodobností p_m, se nazývá *smíšená strategie*.

Analogicky pro druhého hráče.

Poznámka. Na ryzí strategie lze nahlížet jako na speciální případ smíšených strategií – pro ryzí strategii s_1 volíme pravděpodobnosti $p_1 = 1$, $p_2 = p_3 = \dots = p_m = 0$; podobně pro další.

Definice. Smíšená strategie, která hráči zaručuje stejný průměrný zisk bez ohledu na rozhodnutí protihráče, se nazývá *rovnovážná*.

Poznámka. Číslo 1/12 z předchozího příkladu se nazývá *hodnota hry* (hodnotu hry vždy uvádíme se znaménkem platným pro prvního hráče). Postup zajišťující hráči zisk rovný hodnotě hry se nazývá *optimální strategie*. V předchozí hře je optimální strategie prvního hráče $(7/12, 5/12)$, optimální strategie druhého hráče je stejná.

Můžeme se ptát, zda pro každou hru s nulovým součtem existuje její hodnota (tedy zisk, který si umí zaručit každý z hráčů). Připomeňme, že v seriálu uvažujeme pouze *konečné hry*, což jsou takové hry, ve kterých má každý hráč konečné množství ryzích strategií. V takovém případě je odpověď kladná – viz následující věta. Název minimax je odvozen od způsobu, kterým se hodnota hry hledá: první hráč se snaží maximalizovat svůj zisk, druhý minimalizovat (uvažujeme-li v hodnotách daných výplatní maticí prvního hráče).

Větu si nedokážeme, ale při řešení úloh ji budeme využívat.

[18] Což ostatně ve všech uváděných hrách mlčky předpokládáme.

Věta 2. (Minimax) *Pro každou konečnou hru s nulovým součtem*

(i) *existuje číslo V, nazývané hodnota hry,*

(ii) *existuje smíšená strategie pro prvního hráče taková, že jeho průměrný zisk je alespoň V nezávisle na tazích druhého hráče,*

(iii) *existuje smíšená strategie pro druhého hráče taková, že jeho průměrný zisk je nejvýše V nezávisle na tazích prvního hráče.*

Poznámka. Všimněme si, že pokud se nám podaří najít smíšenou strategii $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ pro prvního hráče a smíšenou strategii $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_k)$ pro druhého hráče tak, že průměrná výplata prvního hráče se bude rovnat minus průměrné výplatě druhého hráče, jedná se o optimální strategie a příslušná průměrná výplata prvního hráče je hodnota hry. *Vyřešením* hry s nulovým součtem budeme rozumět nalezení hodnoty hry a alespoň jedné dvojice optimálních strategií.

Cvičení. V následujících hrách nalezněte výplatní matici, analyzujte hru a určete její hodnotu a optimální strategie pro oba hráče. Jsou tyto hry *fér*?[19]

Hra 47. Uvažujme hru Sudý a Lichý (viz Hra 46) s tím rozdílem, že poražený zaplatí vítězi součin vyřčených čísel namísto součtu (ovšem to, kdo vyhraje, stále závisí na součtu).

Hra 48. (Karty) Aďa má v ruce černé eso a červenou osmičku. Hela má červenou dvojku a černou osmičku. Ve stejné chvíli obě zvolí jednu ze svých karet a vyloží ji na stůl. Jsou-li barvy stejné, vyhrává Aďa, jsou-li různé, Hela. Poražená zaplatí vítězce součet na kartách (eso počítáme jako 1).

Sedlové body a dominující strategie

V případě, že výplatní matice je větší než typu 2×2, nemusí být snadné ji vyřešit. V některých případech si můžeme pomoci nalezením sedlových bodů nebo vyškrtnutím dominovaných strategií. Jak na to, si vysvětlíme v této kapitole.

Mějme konečnou hru s nulovým součtem a označme si (a_{ij}) prvky výplatní matice A (už bez označení strategií):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mk} \end{pmatrix}.$$

Každou smíšenou strategii hráče I si můžeme zapsat jako m-tici pravděpodobností (jejichž součet je jedna) $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, stejně tak smíšenou strategii hráče II jako k-tici $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$. Pokud hráč I hraje se smíšenou strategií $\mathbf{p}$ a hráč II hraje ryzí strategii j, je průměrná výplata hráče I rovna

$$\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}.$$

Naopak, hraje-li hráč II smíšenou strategii $\mathbf{q}$ a hráč I se drží ryzí strategie i, je průměrná výplata hráče II rovna

$$-\sum_{j=1}^{k} q_j a_{ij}.$$

Obecně, hraje-li hráč I smíšenou strategii $\mathbf{p}$ a hráč II smíšenou strategii $\mathbf{q}$, je průměrná výplata hráče I rovna

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} p_i q_j a_{ij}.$$

[19] Hra je fér, je-li její hodnota nula.

Definice. Pokud pro prvek a_{ij} matice A platí

(i) a_{ij} je minimum i-tého řádku, a zároveň
(ii) a_{ij} je maximum j-tého sloupce,

nazýváme prvek a_{ij} *sedlovým bodem.*

Je-li a_{ij} sedlový bod, pak hráč I může vyhrát přinejmenším a_{ij} volbou i-tého řádku (ryzí i-té strategie) a hráč II může ztratit nejvýše a_{ij} volbou j-tého sloupce. Tudíž a_{ij} je hodnota hry a příslušné ryzí strategie jsou optimální.

Příklad 3. Vyřešte hru danou maticí A,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Prvek na pozici a_{22} je sedlový bod, jelikož je to nejmenší hodnota ve svém řádku a největší ve svém sloupci. Optimální pro hráče I je tedy druhý řádek a pro hráče II druhý sloupec. Hodnota hry je 2 a $(0, 1, 0)$ je optimální strategie pro oba hráče. ♠

Pro větší matice bývá výhodné napsat si ke každému řádku minimum a ke každému sloupci maximum. Pokud se nějaké dvě hodnoty rovnají, je na jejich „křížení“ sedlový bod.

Příklad.

$$\begin{array}{rcc} & & \text{min řádek} \\ A = & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \text{max sloupec} & \begin{matrix} 3 & 2 & 2 & 2 \end{matrix} & \end{array} \qquad \begin{array}{rcc} & & \text{min řádek} \\ B = & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \text{max sloupec} & \begin{matrix} 3 & 1 & 2 & 2 \end{matrix} & \end{array}$$

Řešení. V matici A žádný sedlový bod neexistuje. Změníme-li ale prvek a_{12} na 1, dostaneme matici B, která už sedlový bod má. Je jím prvek b_{42}, neboť minimum čtvrtého řádku je rovno maximu druhého sloupce. ♠

Cvičení. Dokažte, že existují-li ve hře s nulovým součtem dva sedlové body, pak jsou jejich hodnoty stejné.

Poznámka. Je-li výplatní matice typu 2×2, není těžké hru vyřešit. Buď existuje sedlový bod, nebo můžeme najít rovnovážné strategie podobně jako ve Hře 46. Takto lze dokázat Větu 2 pro „malé“ matice – což je ostatně vaším úkolem v seriálové sérii.

Jak si ale poradit v případě větších matic bez sedlových bodů? Občas můžeme vyškrtnout řádky či sloupce, které jsou pro daného hráče zjevně nevýhodné (a při troše štěstí takto celou hru zredukujeme na matici typu 2×2).

Definice. Řekneme, že řádek i matice $A = (a_{ij})$ *dominuje* řádek k, pokud pro všechna j platí $a_{ij} \geq a_{kj}$. Tato situace se dá rovněž vyjádřit slovy, že řádek k je *dominován* řádkem i.

Podobně, sloupec j dominuje sloupec k (resp. k je dominován sloupcem j), pokud $a_{ij} \leq a_{ik}$ pro každé i.

Nechť je v nějaké hře řádek k dominován řádkem i. Jelikož hráč I získá volbou ryzí strategie i vždy alespoň tolik, co volbou ryzí strategie k, je rovněž ve smíšených strategiích výhodnější „přenést“ pravděpodobnost příslušnou strategii k na strategii i. Tudíž můžeme k-tý řádek z matice vymazat, aniž bychom ovlivnili hodnotu hry. Poznamenejme ještě, že odstraněním dominovaného řádku můžeme přijít o některé optimální strategie, které ho využívají. Nicméně vždy zbyde alespoň jedna optimální strategie, která jej nevyužívá.

Zkusme si redukci pomocí dominujících řádků/sloupců na příkladu.

Příklad. Vyřešte hru danou maticí

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Vidíme, že poslední sloupec je dominován prostředním. Můžeme tedy matici zredukovat na A'. Dále je první řádek v matici A' dominován třetím (všimněme si, že v matici A toto neplatilo). Smazáním prvního řádku obdržíme matici A'' typu 2×2.

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice A'' nemá sedlový bod, ale hledáním rovnovážných strategií jako ve Hře 46 můžeme dospět k výsledku $p = 3/4$, $q = 1/4$, hodnota hry je $7/4$. Optimální strategie hráče I v původní hře je $(0, 3/4, 1/4)$ a pro hráče II je to $(1/4, 3/4, 0)$. ♠

Pozorování. Řádek/sloupec matice může být odstraněn rovněž v případě, je-li dominován pravděpodobnostní kombinací jiných řádků/sloupců. I v takovém případě je totiž pro hráče výhodnější (přinejhorším stejně výhodné) hrát místo tohoto řádku/sloupce příslušnou smíšenou strategii.

Příklad. Uvažujme hru

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Prostřední sloupec je dominován okolními dvěma s pravděpodobností $1/2$ pro každý z nich. Po zredukování matice na A' vidíme, že nyní je prostřední řádek dominovaný kombinací horního s vahou $1/3$ a dolního s vahou $2/3$. Redukovaná matice A'' už je typu 2×2.

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \qquad A'' = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Hodnotu hry a optimální strategie zkuste nalézt sami. ♠

Poznámka. Ne všechny matice mohou být redukovány pomocí dominujících řádků/sloupců. Dokonce ani když má matice sedlový bod, nemusí existovat dominovaný řádek/sloupec. Zkuste si to ověřit na matici 3×3 z Příkladu 3.

Cvičení. Vyřešte hru s výplatní maticí

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cvičení. Vyřešte hru s výplatní maticí v závislosti na reálném parametru t. Načrtněte si graf hodnoty hry, jakožto funkce parametru $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

Cvičení. Vyřešte hry dané výplatními maticemi

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hra 49. Předpokládejme, že o dva trhy, A a B, se zajímají dvě firmy, I a II. Na trhu A se očekávají zakázky představující zisk 150 milionů, na trhu B zisk 90 milionů. Každá z firem má finance buď na velkou propagační akci na jednom z trhů, nebo na menší kampaň na obou trzích. Účinnost propagace obou firem je stejná a zakázky se rozdělují podle těchto pravidel:

(i) Vede-li na trhu reklamní kampaň pouze jedna firma, získá z tohoto trhu všechny zakázky.
(ii) Vedou-li obě firmy na trhu kampaň téhož „typu“ (včetně žádné kampaně), získají obě polovinu zakázek.
(iii) Vede-li jedna firma na trhu malou kampaň a druhá velkou, získá firma s malou kampaní 1/3 zakázek a firma s velkou kampaní 2/3.

Obě firmy se musí rozhodnout ve stejnou dobu nezávisle na sobě (například musejí objednat billboardy, reklamní tiskoviny, ...). Jaké jsou jejich optimální strategie? Jelikož z principu nejde o opakovanou hru, zajímají nás hlavně ryzí strategie.

Návod. Nejedná se o hru s nulovým součtem, ale s konstantním součtem – trh, který si mezi sebou chtějí firmy rozdělit, je stále stejně velký. Rozmyslete si, že na způsobu řešení to nic nemění (neboli každá hra s konstantním součtem je ekvivalentní nějaké hře s nulovým součtem).

Dvojmaticové hry

Hrám dvou hráčů v normálním tvaru, po kterých nepožadujeme konstantní součet výplatních funkcí, se říká *dvojmaticové*. Jelikož nelze obecně odvodit jednu výplatní funkci z druhé, nestačí nám k jejich zadání matice, ale potřebujeme buď obě matice výplatních funkcí, nebo příslušnou dvojmatici.

Analýza obecných dvojmaticových her je nutně složitější než analýza her s nulovým či konstantním součtem. Není-li součet výplatních funkcí konstantní, nemůžeme čekat, že maximalizace výnosů jednoho hráče bude ekvivalentní minimalizaci ztrát druhého.

Základní dělení dvojmaticových her je na hry *nekooperativní* a hry *kooperativní*. V případě nekooperativních her není hráčům umožněno se předem domlouvat, případně neexistuje způsob, jak mezi sebou uzavřít závaznou dohodu. Rovněž není možné dělit se po skončení hry o výnosy. Hry s nulovým součtem jsou ze své podstaty („ztráta jednoho je zisk druhého“) nekooperativní. Teorie kooperativních her zahrnuje možnost domluvit se dopředu se spoluhráči na (ne)spolupráci, případně se podělit o zisk. My se budeme věnovat pouze nekooperativním hrám.

Ve hrách s nulovým součtem byla nejlepší strategie ta, která hráči umožnila zisk rovný hodnotě hry. Avšak jak již bylo řečeno, ve dvojmaticových hrách nemáme naději na platnost Věty 2 (Minimax), a tím pádem ani na zavedení hodnoty hry. Potřebujeme tedy najít jiný koncept, jak posuzovat „optimálnost“ strategií.

Následující teorii lze rozvinout pro hru n hráčů v normálním tvaru, my ji však budeme využívat jen pro hry dvou hráčů, a tak si potřebné pojmy zavedeme pouze pro $n = 2$.

Definice. Mějme hru dvou hráčů v normálním tvaru s množinami strategií S, T a výplatními funkcemi u_1, u_2. Dvojice ryzích strategií (s^*, t^*), $s^* \in S$, $t^* \in T$, se nazývá *rovnovážný bod*, platí-li

(i) $u_1(s, t^*) \leq u_1(s^*, t^*)$ pro každé $s \in S$, a zároveň
(ii) $u_2(s^*, t) \leq u_2(s^*, t^*)$ pro každé $t \in T$.

Klíčová vlastnost rovnovážného bodu je, že se žádnému z hráčů nevyplatí *jednostranné odchýlení od strategie*. Jinými slovy, hráč si nepolepší, pokud strategii z rovnovážného bodu vymění za libovolnou jinou, v případě, že jeho protihráč bude hrát stále stejně.

Příklad. Uvažujme následující dvě hry:

$$A = \begin{pmatrix} (3,3) & (0,0) \\ (0,0) & (5,5) \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} (3,3) & (4,3) \\ (3,4) & (5,5) \end{pmatrix}.$$

Řešení. Značme pro jednoduchost prvky dvojmatice stejně, jako jsme prve značili prvky matice, tedy například dvojici v prvním řádku a druhém sloupci matice A budeme značit a_{12}.

Prvek a_{11} je rovnovážný bod s výplatní „dvojfunkcí" $(3, 3)$. Pokud oba hráči věří, že protihráč zvolí svoji první strategii, ani jeden nebude chtít hrát druhou strategii. Prvek a_{22} je také rovnovážný bod, a jelikož jeho výplatní funkce je $(5, 5)$, zdá se pro oba hráče výhodnějším. Problém je, že v nekooperativní hře se spolu hráči nemohou domluvit. Pokud se hra hraje opakovaně a z nějakého důvodu oba doteď volili první strategii, je nejrozumnější volbou hrát opět první strategii, ačkoliv by oba mohli současnou změnou strategií dosáhnout lepšího zisku.

Tento jev se vyskytuje často, obvykle ve hrách s více hráči. Snaha změnit strukturu jazyka, systému měření nebo času přednášky vyžaduje změnu po mnoha lidech současně, a to dřív, než z ní vyplynou jakékoliv výhody.

V matici B je prvek b_{11} podle definice rovněž rovnovážný bod – ani jeden hráč nezíská změnou strategie nic navíc. Na druhou stranu, ani jeden hráč změnou strategie nic neztratí, a pokud ji změní oba, dokonce oba získají. Rovnovážný bod b_{11} nazýváme *nestabilní*. ♠

Příklad 4. Nalezněte rovnovážné body hry

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} t_1 & t_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} & \begin{pmatrix} (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (1,-1) \end{pmatrix} \end{array}.$$

Řešení. Začněme například s dvojicí strategií (s_1, t_1). V tuto chvíli se druhému hráči vyplatí změnit strategii na t_2 a polepšit si tak z -1 na 1. Ovšem hraje-li hráč II (třeba při opakované hře) strategii t_2, vyplatí se hráči I změnit s_1 na s_2. Tím si ovšem hráč II pohoršil na -1, což může jednostrannou změnou strategie zlepšit – začne hrát t_1. Teď si ovšem pohoršil hráč I. Změní tedy strategii zpátky na s_1, čímž se dostáváme opět na začátek. Dokud se budeme držet jen ryzích strategií, z kruhu se nevymotáme. ♠

Vidíme, že ne všechny hry mají rovnovážný bod v ryzích strategiích. Pomůžeme si, když podobně jako u her s nulovým součtem zavedeme *smíšené* strategie? Zkusme to. Navíc si zadefinujme ještě takzvané očekávané hodnoty výhry.

Definice. Ve hře dvou hráčů v normálním tvaru s množinami strategií $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ a $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ a výplatními maticemi A, B definujeme pro každou dvojici smíšených strategií $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ a $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$ *očekávanou hodnotu výhry hráče I* vztahem

$$\pi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} p_i q_j a_{ij}$$

a *očekávanou hodnotu výhry hráče II* vztahem

$$\pi_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} p_i q_j b_{ij}.$$

Definice. Dvojice smíšených strategií $(\mathbf{p}*, \mathbf{q}*)$ se nazývá *rovnovážný bod*, pokud pro všechny smíšené strategie $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ platí následující nerovnosti:

$$\pi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}*) \leq \pi_1(\mathbf{p}*, \mathbf{q}*) \qquad \text{a} \qquad \pi_2(\mathbf{p}*, \mathbf{q}) \leq \pi_2(\mathbf{p}*, \mathbf{q}*).$$

A teď už konečně můžeme vyslovit slavnou a důležitou větu, díky níž matematik John Forbes Nash dostal v roce 1994 Nobelovu cenu za ekonomii. Na Nashovu počest se rovnovážným bodům říká mimo jiné *Nashova ekvilibria*.

Věta. (Nash, 1951) *Ve smíšených strategiích má každá konečná hra v normálním tvaru alespoň jeden rovnovážný bod.*

Důkaz Nashovy věty využívá hlubší matematickou teorii (mimo jiné Brouwerovu větu o pevném bodě), a v seriálu ho tudíž vynecháme.

Vzájemně nejlepší odpovědi

Když už víme, že rovnovážný bod musí existovat v úplně každé konečné hře v normálním tvaru, bylo by dobré ho i umět najít. Pusťme se do toho!

Rovnovážné strategie s^*, t^* tvořící rovnovážný bod (s^*, t^*) jsou podle definice vždy nejlepší odpovědí jedna na druhou v tom smyslu, že zvolí-li první hráč svou rovnovážnou strategii s^*, pak si hráč II odchýlením od t^* nemůže polepšit. Podobně hráč I si nemůže polepšit odchýlením od s^*, zvolí-li druhý hráč strategii t^*. Přesněji řečeno:

Definice. *Nejlepší odpovědí* hráče I na strategii t hráče II se rozumí množina

$$R_1(t) = \{s^* \in S : u_1(s^*, t) \geq u_1(s, t) \text{ pro každé } s \in S\}.$$

Podobně nejlepší odpovědí hráče II na strategii s hráče I se rozumí množina

$$R_2(s) = \{t^* \in T : u_2(s, t^*) \geq u_2(s, t) \text{ pro každé } t \in T\}.$$

Má-li každý z hráčů na výběr pouze dvě strategie, představují množiny R_1, R_2 křivky v rovině – tzv. *reakční křivky*.

Cvičení. Dokažte, že (s^*, t^*) je rovnovážný bod právě tehdy, když platí:

$$s^* = R_1(t^*) \qquad \text{a zároveň} \qquad t^* = R_2(s^*).$$

Hledáme-li rovnovážný bod, můžeme postupovat tak, že sestrojíme reakční křivky a nalezneme jejich průsečík.

Příklad. Vzpomeňme si na hru z Příkladu 4 danou dvojmaticí A a nalezněme všechny její rovnovážné body.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad t_1 & \quad t_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} & \begin{pmatrix} (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Řešení. Jak jsme si již rozmysleli, rovnovážný bod v ryzích strategiích tato hra nemá. Odpovídají tomu i nejlepší odpovědi na ryzí strategie, které jsou

$$\begin{aligned} R_1(t_1) &= s_1, \quad R_1(t_2) = s_2, \\ R_2(s_1) &= t_2, \quad R_2(s_2) = t_1. \end{aligned}$$

Vidíme, že v tomto případě neexistuje dvojice strategií, které by byly nejlepší odpovědí jedna na druhou.

Rovnovážný bod musíme hledat ve smíšených strategiích. Pro hráče I mějme smíšenou strategii $\mathbf{p} = (p, 1-p)$ a pro hráče II smíšenou strategii $\mathbf{q} = (q, 1-q)$. Očekávané hodnoty výhry jednotlivých hráčů jsou následující:

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= 1 \cdot p \cdot q - 1 \cdot p \cdot (1-q) - 1 \cdot (1-p) \cdot q + 1 \cdot (1-p) \cdot (1-q) = \\ &= p(4q-2) - 2q + 1, \\ \pi_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= -1 \cdot p \cdot q + 1 \cdot p \cdot (1-q) + 1 \cdot (1-p) \cdot q - 1 \cdot (1-p) \cdot (1-q) = \\ &= q(-4p+2) + 2p - 1. \end{aligned}$$

Hledejme nejlepší odpovědi hráče I v závislosti na q.

(i) Je-li $0 \le q < \frac{1}{2}$, je $\pi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ pro pevnou hodnotu q lineární funkce, která je klesající. Největší hodnoty tedy bude nabývat pro nejmenší možné p, kterým je $p = 0$. V tomto případě platí $R_1(q) = 0$.

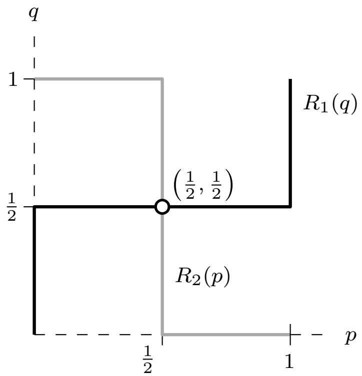
(ii) Pro $q = \frac{1}{2}$ je $\pi_1(\mathbf{p}, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ konstantní (nulová) funkce. Výsledek tedy nezáleží na volbě p, a proto $R_1(\frac{1}{2}) = [0, 1]$.

(iii) Je-li $\frac{1}{2} < q \le 1$, je $\pi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ pro pevnou hodnotu q rostoucí funkce. Největší hodnoty nabývá pro největší možné p, kterým je $p = 1$. V tomto případě platí $R_1(q) = 1$.

Podobně pro hráče II odvodíme nejlepší odpověď v závislosti na p:

$$R_2(p) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } 0 \le p < \frac{1}{2}, \\ [0,1], & \text{pokud } p = \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{pokud } \frac{1}{2} < p \le 1. \end{cases}$$

Reakční křivky si můžeme zakreslit do roviny:



Jediný rovnovážný bod je tedy

$$\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right).$$

Budou-li se hráči držet těchto strategií, výhra každého z nich bude rovna nule. ♠

Výše uvedeným postupem umíme najít všechny rovnovážné body v normálních hrách dvou hráčů, má-li každý z nich jen dvě strategie. Ovšem ani nalezení všech rovnovážných bodů nemusí znamenat, že s výsledkem budeme spokojeni. Následující hra je toho dobrým příkladem – ačkoliv nalezneme všechny rovnovážné body, neumíme hráčům poradit, kterou strategii zvolit (pohybujeme-li se stále na poli nekooperativních her). Co s tím dál? Nic. Smiřme se s tím, že ani teorie her není všemocná a někdy to zkrátka lépe nejde. Na druhou stranu nekonečné množství možností, které měli hráči díky volbě smíšených strategií na výběr, alespoň zredukujeme na tři relativně smysluplné.

Hra 50. (Manželské dilema) Manželé se rozhodují, kam večer půjdou. Žena by ráda na box, kdežto muž do opery. Oba přitom budou spokojenější, když půjdou spolu, než když bude každý jinde, viz výplatní dvojmatice (muž volí řádky, žena sloupce).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{O} & \mathrm{B} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{O} \\ \mathrm{B} \end{array} & \begin{pmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

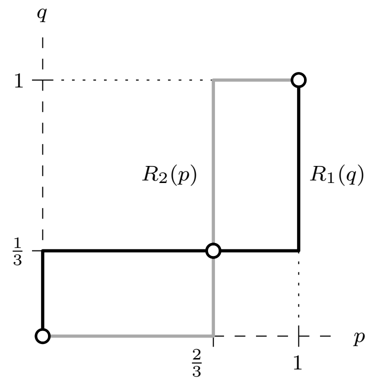
Řešení. Pokud bychom si dovolili hru řešit jako kooperativní, řešení by bylo nasnadě: v polovině večerů půjdou na box, v druhé polovině na operu. Průměrná výplata každého z nich by byla 3/2.

My se ovšem zabýváme nekooperativními hrami. Rovnovážné body v ryzích strategiích jsou (O, O) a (B, B), přičemž muž preferuje první z nich, zatímco žena druhý. Zkusme ještě zjistit, zda ve smíšených strategiích neexistuje další rovnovážný bod. Očekávané hodnoty výhry jsou

$$\pi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2pq + 1(1-p)(1-q) = p(3q-1) - q + 1,$$
$$\pi_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 1pq + 2(1-p)(1-q) = q(3p-2) - 2p + 1$$

a příslušné reakční křivky jsou

$$R_1(q) = \begin{cases} 0 & \text{pro } p \in [0, \frac{1}{3}), \\ [0,1] & \text{pro } p = \frac{1}{3}, \\ 1 & \text{pro } p \in (\frac{1}{3}, 1], \end{cases} \qquad R_2(p) = \begin{cases} 0 & \text{pro } p \in [0, \frac{2}{3}), \\ [0,1] & \text{pro } p = \frac{2}{3}, \\ 1 & \text{pro } p \in (\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$



Manželské dilema má tedy celkem tři rovnovážné body (již dříve nalezené rovnovážné body v ryzích strategiích se samozřejmě objeví i při analýze reakčních křivek – viz náčrtek), a jak jsme předeslali, neumíme manželům poradit nic jednoznačného.

Rovnovážný bod	Očekávaná výhra
$\big((1,0),(1,0)\big)$	$(2,1)$
$\big((\frac{1}{3},\frac{2}{3}),(\frac{2}{3},\frac{1}{3})\big)$	$(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$
$\big((0,1),(0,1)\big)$	$(1,2)$

♠

Cvičení. Nalezněte všechny rovnovážné body v následujících hrách.

Hra 51. (Samaritánovo dilema) Představme si, že Ministerstvo práce a sociálních věcí řeší problém, do jaké míry podporovat nezaměstnané. Jestliže se dotyčný snaží najít práci, pak je výhodnější jej podpořit, aby se mohl například rekvalifikovat a získal lépe placené místo – státu pak odvede vyšší daně. Jestliže se však nikterak nesnaží, je výhodnější jej nepodpořit (nepočítáme-li případný nárůst kriminality). Z hlediska nezaměstnaného je výhodné hledat práci jen tehdy, když nemůže být na státní podpoře.

Uvažujme například následující hodnoty odpovídající jednotlivým situacím:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Podpořit} \\ \text{Nepodpořit} \end{array} \begin{array}{c} \text{Snažit se} \quad \text{Flákat se} \\ \begin{pmatrix} (3,2) & (-1,3) \\ (-1,1) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}.$$

Hra 52. Sněhurka hodí spravedlivou kostkou tak, aby Trpaslík neviděl výsledek, a poté mu poví, kolik ok padlo, přičemž nemusí mluvit pravdu. Trpaslík se rozhodne, zda jí věří, nebo nevěří. Pravda se poté ověří pohledem na kostku. Pokud je Sněhurka přistižena při lži, velmi ztrácí, pokud je Trpaslík nespravedlivě nedůvěřivý, ztrácí též, ale méně. Pokud Sněhurce věří a ona jej podvádí, pak Sněhurka získává a Trpaslík trochu ztrácí. V případě, že jí Trpaslík oprávněně věří, nic se neděje. Výplatní dvojmatice by mohla vypadat třeba takto:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Lhát} \\ \text{Mluvit pravdu} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Nevěřit} & \text{Věřit} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (-6,0) & (2,-1) \\ (0,-2) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}.$$

Poznámka. Ačkoliv se zdá, že v poslední hře hrají hráči postupně, nikoliv najednou, jedná se stále o hru v normálním tvaru. Celá rozhodovací situace je postavena tak, že nezáleží na tom, rozhodnou-li se hráči ve stejnou chvíli, nebo jeden po druhém.

Vězňovo dilema

Hra 53. (Vězňovo dilema) Policie zatkla Boba a Bobka. Ihned po zatčení je od sebe oddělila, aby se nemohli domlouvat, a sdělila jim následující ortel:

(i) Pokud budou oba dva zapírat, stráví ve vězení každý 3 roky.
(ii) Pokud se ale jeden z nich přizná a druhý bude zapírat, vyfasuje první 1 rok a druhý 25 let.
(iii) Přiznají-li se oba, odsedí si každý 10 let.

Příslušná dvojmatice je

$$\begin{array}{l} \\ \text{Zapírat} \\ \text{Přiznat se} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Zapírat} & \text{Přiznat se} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (-3,-3) & (-25,-1) \\ (-1,-25) & (-10,-10) \end{pmatrix} \end{array}.$$

Dilema se této hře říká proto, že pro oba by bylo výhodnější zapírat a odsedět si pouze tři roky. Zádrhel je v tom, že se nemohou domlouvat a stále je tu pokušení zkrátit tři roky na jeden, spojené navíc s mnohonásobně horším trestem pro toho, kdo vydrží a bude zapírat. Ovšem jedinou racionální volbou je se přiznat, ačkoliv ve výsledku to má horší dopad na oba dva hráče.

Zdá se, že není co víc v této hře řešit – jediným rovnovážným bodem je dvojice (Přiznat se, Přiznat se), a tak to také dopadne.

Poznámka. Pojmem *Vězňovo dilema* se obecně myslí každá dvojmaticová hra typu

$$\begin{pmatrix} (a,a) & (b,c) \\ (c,b) & (d,d) \end{pmatrix},$$

kde

$$c > a > d > b \quad \text{a} \quad a > (b+c)/2.$$

Z uvedených nerovností plyne, že vzájemná *spolupráce* (řádek 1, sloupec 1) je lepší, než vzájemná *zrada* (řádek 2, sloupec 2), a pokud se bojíte, že protihráč zradí, je nejlepší zradit též. Poslední nerovnost říká, že pokud si hráči mohou věřit, je nejlepší volbou spolupráce.

Některé konflikty typu Vězňova dilematu jsou takové, že je lze hrát pouze jednou, jiné jdou hrát opakovaně (stačí například ve Hře 53 interpretovat výplatní funkci jako peněžní obnos, nikoliv roky v žaláři, a rázem se dá hrát mnohem častěji).

Uvažujme místo jedné hry *superhru* sestávající z velkého množství opakování základní hry (pro nás Vězňova dilematu). Hráči sice stále nemají možnost uzavírat závazné smlouvy o tom, jak se zachovají v příští hře, mohou ale využívat informaci, jak hrál protihráč v předchozích kolech.

Strategie v superhře je kompletní plán, jak se hráč zachová v průběhu celé hry ve všech možných situacích, v nichž se může ocitnout.

Strategie v superhře mohou být například:

(i) **Zlaté pravidlo**: Vždy spolupracuj.
(ii) **Železné pravidlo**: Vždy zraď.
(iii) **Náhodná**: Spolupracuj s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ a zraď rovněž s pravděpodobností $\frac{1}{2}$.
(iv) **Nevraživec**: Spolupracuj, dokud tě protihráč nezradí. Pak vždy zraď.
(v) **Půjčka za oplátku**: V prvním tahu spolupracuj, v dalším opakuj tah protihráče z předchozího kola.
(vi) **Postupná**: Spolupracuj, dokud protivník nezradí. Po jeho první zradě jednou zraď a dvakrát spolupracuj, a tak stále dokola. Po druhé zradě dvakrát po sobě zraď a dvakrát spolupracuj, ..., po n-té zradě n-krát po sobě zraď a dvakrát spolupracuj.
(vii) **Vlídná většina**: Poprvé spolupracuj, pak použij strategii, kterou do té doby použil protivník nejvíckrát. Jsou-li četnosti obou strategií stejné, spolupracuj.
(viii) **Krutá většina**: Poprvé zraď, pak použij strategii, kterou do té doby použil protivník nejvíckrát. Jsou-li četnosti obou strategií stejné, zraď.
(ix) ...

Na přelomu osmdesátých a devadesátých let byly pořádány počítačové turnaje, do nichž odborníci na teorii her zasílali jednotlivé strategie, aby se utkaly každá s každou v superhře založené na Vězňově dilematu. Každé strategii byl přiřazen součet přes všechny odehrané superhry.

Setrvalým vítězem turnajů byla Půjčka za oplátku. To je zajímavé jednak proto, že se jedná o poměrně jednoduchou strategii, a jednak proto, že lidé ji mnohdy instinktivně používají v mnoha konfliktních situacích. Ačkoliv Půjčka za oplátku vyhrála turnaj nasbíráním největšího součtu přes všechny superhry, v žádné jednotlivé superhře nezískala oproti jiné strategii většinu.

Cvičení. Dokažte, že Půjčka za oplátku skutečně nikdy nezíská v jedné superhře víc než strategie protihráče, ať je tato jakákoliv.

Letošní seriál je u konce. V širém světe teorie her jsme se stihli jen letmo projít, přesto doufám, že se vám procházka líbila a při čtení seriálu jste se dozvěděli něco nového. Loučí se s vámi a hodně dobrých nápadů nejen při řešení PraSátka přeje

Alča Skálová