Teorie her

3. SERIÁLOVÁ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 8. DUBNA 2013

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)

Hráč I si tajně napíše na papír nějaké přirozené číslo z rozmezí 1 až n, označme ho i. Ve stejnou chvíli si rovněž hráč II napíše na papír nějaké přirozené číslo z rozmezí 1 až n, označme ho j. Poté si čísla navzájem ukážou.

Pokud je $|i-j|=1$, vyhrává hráč I bod a hráč II naopak bod ztrácí. Pokud $|i-j| \neq 1$, nestane se nic. Vyřešte hru pro libovolné pevné $n \geq 2$ (jmenovitě: nalezněte její hodnotu a alespoň jednu optimální strategii pro každého hráče).

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)

Dokažte Větu 2 (Minimax) ze třetího dílu seriálu pro libovolnou hru s nulovým součtem, ve které má každý hráč na výběr právě ze dvou strategií.

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)

Nalezněte všechny rovnovážné body a jejich příslušné očekávané hodnoty pro oba hráče ve hře dané dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (4,-4) & (-1,-1) \\ (0,1) & (1,0) \end{pmatrix}.$$

Teorie her

3. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1. (24; 22; 3,46; 4,0)

Hráč I si tajně napíše na papír nějaké přirozené číslo z rozmezí 1 až n, označme ho i. Ve stejnou chvíli si rovněž hráč II napíše na papír nějaké přirozené číslo z rozmezí 1 až n, označme ho j. Poté si čísla navzájem ukážou.

Pokud je $|i-j|=1$, vyhrává hráč I bod a hráč II naopak bod ztrácí. Pokud $|i-j|\neq 1$, nestane se nic. Vyřešte hru pro libovolné pevné $n \geq 2$ (jmenovitě: nalezněte její hodnotu a alespoň jednu optimální strategii pro každého hráče). *(Alča Skálová)*

ŘEŠENÍ:
Zvolme si pevné $n \geq 2$. Výplatní matice prvního hráče je následující:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Pokud se hráči I podaří najít takovou m-prvkovou podmnožinu řádků $M \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, že v každém sloupci (tedy pro libovolný tah II) bude alespoň jedna jednička v řádku z množiny M, pak přiřadí-li hráč I každému řádku z M pravděpodobnost $\frac{1}{m}$, zajistí si tím očekávanou výhru $\frac{1}{m}$ (neboť hráč II se nemůže „netrefit“).

Naopak nalezne-li hráč II takovou s-prvkovou podmnožinu sloupců $S \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, že v každém řádku (tedy pro libovolný tah I) bude nejvýše jedna jednička ve všech sloupcích z S dohromady, a přiřadí-li hráč II každému sloupci z S pravděpodobnost $\frac{1}{s}$, bude jeho očekávaná výhra $-\frac{1}{s}$ (hráč I se nemůže „trefit“ vícekrát).

Podaří-li se nám nalézt výše popsané množiny M a S o stejné mohutnosti[1], bude zjevně hodnota hry $\frac{1}{m} = \frac{1}{s}$ a optimální strategie budou odpovídat rovnoměrné volbě řádků/sloupců z M/S.

Označme $\mathbf{p}$ smíšenou strategii hráče I a $\mathbf{q}$ smíšenou strategii hráče II. Není těžké ověřit, že požadavkům na množiny M a S vyhovují v závislosti na n například následující smíšené strategie (začátky se vždy opakují s periodou 4, pouze v (před)poslední periodě mohou být změny):

- $n = 4k$: $\mathbf{p} = (0, p, p, 0, 0, p, p, 0, \ldots 0, p, p, 0)$,
  $\mathbf{q} = (q, q, 0, 0, q, q, 0, 0, \ldots q, q, 0, 0)$,
  kde $p = q = \frac{1}{2k}$; hodnota hry je $\frac{1}{2k}$.

[1] Mohutnost množiny je (pro konečnou množinu) počet jejích prvků.

- $n = 4k + 1$: $\mathbf{p} = (0, p, p, 0, 0, p, p, 0, \dots 0, p, p, p, 0)$,
  $\mathbf{q} = (q, q, 0, 0, q, q, 0, 0, \dots q, q, 0, 0, q)$,
  kde $p = q = \frac{1}{2k+1}$; hodnota hry je $\frac{1}{2k+1}$.
- $n = 4k + 2$: $\mathbf{p} = (0, p, p, 0, 0, p, p, 0, \dots 0, p, p, 0, p, p)$,
  $\mathbf{q} = (q, q, 0, 0, q, q, 0, 0, \dots q, q, 0, 0, q, q)$,
  kde $p = q = \frac{1}{2k+2}$; hodnota hry je $\frac{1}{2k+2}$.
- $n = 4k + 3$: $\mathbf{p} = (0, p, p, 0, 0, p, p, 0, \dots 0, p, p, 0, p, p, 0)$,
  $\mathbf{q} = (q, q, 0, 0, q, q, 0, 0, \dots q, q, 0, 0, q, q, 0)$,
  kde $p = q = \frac{1}{2k+2}$; hodnota hry je $\frac{1}{2k+2}$.

Poznámky:
Polovina z vás si s úlohou poradila na plný počet. Vyzdvihnout bych chtěla především *Martina Raszyka*, který si za nejlepší zformulování úvodní myšlenky vysloužil $+i$. Alternativou ke vzorovému řešení bylo nalezení optimálních strategií pomocí „vyškrtání“ všech dominovaných. To je ostatně dobrý způsob, jak na „předpis“ pro optimální strategie přijít.

Část řešení se nezvládla vypořádat se zobecněním z malých n na všechna. Opakovaně se také vyskytlo (nesprávné) tvrzení, že ze symetričnosti matice plyne symetričnost optimálních strategií obou hráčů. Tady pozor – celou dobu pracujeme s výplatní maticí prvního hráče, která sice je symetrická, ale hra rozhodně symetrická není. *(Alča Skálová)*

Úloha 2.

(24; 22; 4,08; 5,0)

Dokažte Větu 2 (Minimax) ze třetího dílu seriálu pro libovolnou hru s nulovým součtem, ve které má každý hráč na výběr právě ze dvou strategií. *(Alča Skálová)*

Řešení:
Pokud má výplatní matice sedlový bod, tak hodnota hry je hodnota právě tohoto sedlového bodu a hráči hrají podle odpovídajících ryzích strategií. Proto dále předpokládejme, že naše matice sedlový bod nemá, a označme si ji

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Hledáme optimální strategii pro prvního hráče (p je pravděpodobnost, s jakou volí první strategii, a q pravděpodobnost, že druhý hráč hraje dle své první strategie). Zkusme tedy podle návodu v seriálu najít takové p, že očekávaná výhra prvního hráče nebude záviset na tahu druhého hráče:

$$ap + c(1 - p) = bp + d(1 - p).$$

Za předpokladu, že $a + d - b - c \neq 0$, dostáváme $p = \frac{d-c}{a+d-b-c}$. Vezmeme si BÚNO $a < b$.[2] Společně s tím, že matice nemá sedlový bod, nám to už jednoznačně určuje nerovnosti: $b > d$, $c > d$, $c > a$. Z toho vidíme, že $a + d - b - c$ nemůže být nulové. Dále nám tyto nerovnosti říkají, že $p \in (0, 1)$.

Stejným způsobem sestavíme rovnice pro výpočet q

$$-aq - b(1 - q) = -cq - d(1 - q)$$

a odvodíme, že

$$q = \frac{d - b}{a + d - b - c} \in (0, 1).$$

[2] Kdybychom připustili rovnost $a = b$, dostali bychom sedlový bod.

Zbývá ověřit, zda jsou nalezené strategie skutečně optimální. Očekávaná hodnota výhry prvního hráče pro $p = \frac{d-c}{a+d-b-c}$ je

$$ap + c(1-p) = \frac{ad - bc}{a + d - b - c},$$

což je stejné číslo, jako očekávaná hodnota výhry druhého hráče pro $q = \frac{d-b}{a+d-b-c}$. Popsané strategie jsou tedy optimální a hodnota hry je $\frac{ad-bc}{a+d-b-c}$.

Poznámky:
Většina řešitelů si poctivě přečetla seriál, takže jim úloha nedělala nejmenší potíže :).

(Anna Chejnovská)

Úloha 3.

(31; 29; 4,19; 5,0)

Nalezněte všechny rovnovážné body a jejich příslušné očekávané hodnoty pro oba hráče ve hře dané dvojmaticí

$$\begin{pmatrix} (4,-4) & (-1,-1) \\ (0,1) & (1,0) \end{pmatrix}.$$

(Alča Skálová)

Řešení:
Hledejme rovnou rovnovážné body ve smíšených strategiích, neboť ryzí strategie jsou pouze speciálním případem strategií smíšených. Pro hráče I uvažujme smíšenou strategii $\mathbf{p} = (p, 1-p)$ a pro hráče II smíšenou strategii $\mathbf{q} = (q, 1-q)$. Očekávané hodnoty výhry jednotlivých hráčů jsou následující:

$$\begin{aligned}
\pi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= 4 \cdot p \cdot q - 1 \cdot p \cdot (1-q) + 0 \cdot (1-p) \cdot q + 1 \cdot (1-p) \cdot (1-q) = \\
&= 2p(3q-1) - q + 1, \\
\pi_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= 4 \cdot p \cdot q - 1 \cdot p \cdot (1-q) + 1 \cdot (1-p) \cdot q + 0 \cdot (1-p) \cdot (1-q) = \\
&= q(1-4p) - p.
\end{aligned}$$

Hledejme nejlepší odpovědi $R_1(q)$ hráče I v závislosti na q:

(i) Je-li $0 \leq q < \frac{1}{3}$, je $\pi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ pro pevnou hodnotu q klesající lineární funkce. Největší hodnoty nabývá pro $p = 0$. V tomto případě platí $R_1(q) = 0$.

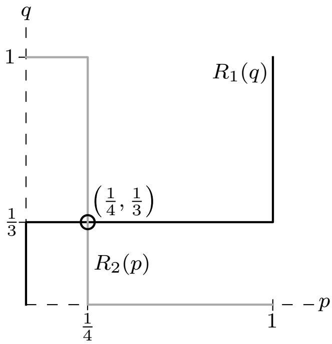
(ii) Pro $q = \frac{1}{3}$ je $\pi_1\left(\mathbf{p}, \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$ konstantní (nulová) funkce. Výsledek tedy nezáleží na volbě p, a proto $R_1\left(\frac{1}{3}\right) = [0,1]$.

(iii) Je-li $\frac{1}{3} < q \leq 1$, je $\pi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ pro pevnou hodnotu q lineární rostoucí funkce. Největší hodnoty nabývá pro $p = 1$. V tomto případě platí $R_1(q) = 1$.

Podobně pro hráče II odvodíme nejlepší odpověď v závislosti na p:

$$R_2(p) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } 0 \leq p < \frac{1}{4}, \\ [0,1], & \text{pokud } p = \frac{1}{4}, \\ 0, & \text{pokud } \frac{1}{4} < p \leq 1. \end{cases}$$

Zakresleme si reakční křivky do roviny:



Jediný rovnovážný bod je tedy

$$\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right).$$

Nyní musíme ještě dopočítat příslušné očekávané hodnoty pro oba hráče, jimiž jsou:

$$\pi_1\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) = \frac{2}{3},$$
$$\pi_2\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) = -\frac{1}{4}.$$

Poznámky:

Vzhledem k tomu, že byla úloha téměř totožná s úlohou řešenou v seriálu, většina z vás ji na ni prostě napasovala a měla vystaráno. Nejčastějším důvodem vedoucím ke ztrátě bodu tedy bylo to, že jste si pořádně nepřečetli zadání, které po vás chtělo spočítat taktéž očekávané hodnoty.

(Lukáš Zavřel)