Teorie her

2. seriálová série — Termín odeslání: 11. prosince 2013

Úloha 1. (5 bodů)

Anča s Lukášem hrají hru na schodišti s 2013 schody. Na začátku je na stupních schodiště rozmístěno konečně mnoho mincí (nemusí být na každém schodu, na jednom schodu jich může být více). V každém tahu si hráč vybere jeden schod a z něj přesune libovolné množství mincí (nejméně jednu, nejvýše všechny) o schod níže. S mincemi, které se po přesunu z prvního schodu ocitnou na podlaze, už se dál nehraje. Anča začíná, pravidelně se střídají v tazích, kdo nemůže táhnout, prohrál.

Rozhodněte (a dokažte), které pozice v této hře jsou vyhrávající a které prohrávající.

Úloha 2. (5 bodů)

Na stole je hromádka sirek, dva hráči se postupně střídají v tazích, kdo nemůže táhnout, prohrál. Ve svém tahu musí hráč odebrat alespoň jednu sirku a zároveň smí z hromádky o n sirkách odebrat c sirek pouze tehdy, je-li c dělitelem n (včetně 1 a n).

Nalezněte SG funkci této hry a dokažte, že vámi nalezená SG funkce je správná.

Úloha 3. (5 bodů)

Za dlouhých zimních večerů vymyslel Viktor následující hru: Na začátku hry je v rovině rozmístěno konečně mnoho teček, některé z nich mohou být pospojovány neprotínajícími se uzavřenými křivkami. Tah sestává z nakreslení uzavřené křivky procházející minimálně jednou tečkou a neprotínající[1] jiné křivky ani sama sebe. Jednou tečkou může procházet nejvýše jedna křivka. Hráči se střídají v tazích, kdo nemůže táhnout, prohrál.

Pomozte Viktorovi a určete, které pozice jsou vyhrávající a které prohrávající.

[1] Dotyk křivek taktéž není povolen.

Teorie her

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(35; 30; 4,11; 5,0)

Anča s Lukášem hrají hru na schodišti s 2013 schody. Na začátku je na stupních schodiště rozmístěno konečně mnoho mincí (nemusí být na každém schodu, na jednom schodu jich může být více). V každém tahu si hráč vybere jeden schod a z něj přesune libovolné množství mincí (nejméně jednu, nejvýše všechny) o schod níže. S mincemi, které se po přesunu z prvního schodu ocitnou na podlaze, už se dál nehraje. Anča začíná, pravidelně se střídají v tazích, kdo nemůže táhnout, prohrál.

Rozhodněte (a dokažte), které pozice v této hře jsou vyhrávající a které prohrávající.

(Alča Skálová)

ŘEŠENÍ:

Očíslujme schody zdola čísly $1, 2, \ldots, 2013$. Ukážeme, že na počtech mincí na sudých schodech nezáleží a prohrávající pozice jsou právě ty, v nichž je Nim-součet počtů mincí na lichých schodech nulový. Takovým pozicím říkejme *špatné*, ostatním *dobré*.

Hra je zřejmě konečná a jediná koncová pozice je současně prohrávající a špatná. Stačí tedy dokázat, že z každé špatné pozice vedou tahy jen do dobrých pozic a naopak že z každé dobré pozice vede alespoň jeden tah do nějaké špatné pozice. To bude znamenat, že špatné pozice splývají s prohrávajícími a dobré s vyhrávajícími.

Uvažme nějakou špatnou pozici. Jelikož libovolným tahem se změní počet mincí na právě jednom lichém schodu, změní se přesně jeden sčítanec námi zkoumaného Nim-součtu, a tedy i jeho hodnota. Byla-li předtím nulová, rozhodně nulová nezůstane a výsledná pozice bude dobrá.

Teď naopak uvažme nějakou dobrou pozici. Předpokládejme tedy, že na lichých schodech leží postupně $p_1, p_3, \ldots, p_{2013}$ mincí a platí $p_1 \oplus p_3 \oplus \cdots \oplus p_{2013} \neq 0$. To znamená, že v klasickém Nimu je pozice s 1007 hromádkami sirek o velikostech $p_1, p_3, \ldots, p_{2013}$ vyhrávající a podle seriálu existuje tah, jímž se Nim-součet vynuluje. Pokud je tímto tahem odebrání s sirek z hromádky o velikosti p_{2k-1} ($k \in \mathbb{N}$), stačí v naší původní hře přesunout s mincí z $(2k-1)$-tého schodu na ten $(2k-2)$-tý.

Jsme hotovi.

POZNÁMKY:

Většina z vás si uvědomila, že pozice, v nichž jsou všechny mince jen na sudých schodech, jsou prohrávající, neboť shodí-li první hráč m mincí z některého sudého schodu na lichý, může druhý hráč shodit tytéž mince ještě o schod níž, a prvního hráče tak po konečně mnoha (!) „dvojtazích“ dovede až k nevyhnutelné záhubě. K prozření, že stačí hrát běžný Nim na lichých schodech (a na případné tahy ze sudých schodů na liché reagovat jako výše) už pak nebylo tak daleko.

(Pepa Tkadlec)

Úloha 2. (35; 26; 3,29; 4,0)

Na stole je hromádka sirek, dva hráči se postupně střídají v tazích, kdo nemůže táhnout, prohrál. Ve svém tahu musí hráč odebrat alespoň jednu sirku a zároveň smí z hromádky o n sirkách odebrat c sirek pouze tehdy, je-li c dělitelem n (včetně 1 a n).

Nalezněte SG funkci této hry a dokažte, že vámi nalezená SG funkce je správná.

(Alča Skálová)

Řešení:

Definujeme funkci g: pro $g(0) = 0$ a dále pro přirozené číslo n je hodnota $g(n)$ o 1 vyšší než počet dvojek v prvočíselném rozkladu čísla n. Ukážeme, že tato funkce odpovídá definici SG funkce (číslem n myslíme pozici ve hře s n sirkami).

V nule je hodnota SG funkce rovna nule, protože jde o koncovou pozici. Dále uvažujme $n \geq 1$. Je třeba ověřit

$$g(n) = \min\{k \geq 0 : k \in \mathbb{Z}, k \neq g(n-n') \text{ pro žádné}^2\ n' \mid n\}.$$

Číslo n zapíšeme ve tvaru $2^{k-1} \cdot l$, kde l je liché a $k = g(n)$. Zbývá si rozmyslet:

(i) Pro libovolné celé $0 \leq k' < k$ existuje dělitel n' čísla n, pro který $g(n-n') = k'$. Skutečně, je-li $k' = 0$, volíme $n' = n$. V opačném případě volíme $n' = 2^{k'-1}$, pak totiž $n - n' = 2^{k'-1}(2^{k-k'}l - 1)$, kde výraz v závorce je lichý.

(ii) Neexistuje n', pro které $g(n-n') = k$. To dokážeme sporem, předpokládejme $n - n' = 2^{k-1} \cdot l'$, kde l' je liché a n' je dělitel n. Pak by ale $n' = 2^{k-1}(l - l')$ obsahovalo v prvočíselném rozkladu alespoň k dvojek, protože je výraz v závorce sudý. To je ve sporu s $n' \mid n$.

Poznámky:

Šlo o vcelku jednoduchou úlohu na pochopení definice SG funkce. Rád bych k řešením podotknul, že opravdu není potřeba zvlášť důkaz pro $k = 1$ a $k = 2$, zato by měl v řešení být důkaz pro obecné k.

Dále dělalo některým řešitelům problémy ujasnit, co definují a co dokazují. Je možné definovat g jako ve vzorovém řešení a pak o této funkci dokázat, že je SG funkcí. V takovém případě ale nedokazujeme $g(2^k l) = k + 1$, jelikož jsme to tak už definovali. Druhá možnost je definovat g přímo jako SG funkci, jejíž hodnoty ale zpočátku neznáme. Pro důkaz $g(2^k l) = k + 1$ pak potřebujeme vědět, že na nižších hodnotách už má g tuto vlastnost, neboli ve skutečnosti dokazujeme indukcí. Jen je na této indukci trochu podivné, že nepotřebuje první indukční krok pro $g(1)$. (Nicméně chápu řešitele, kteří namísto okecávání, že ten krok potřeba není, radši napsali, že ho udělali.)

(Mirek Olšák)

Úloha 3. (20; 17; 4,25; 5,0)

Za dlouhých zimních večerů vymyslel Viktor následující hru: Na začátku hry je v rovině rozmístěno konečně mnoho teček, některé z nich mohou být pospojovány neprotínajícími se uzavřenými křivkami. Tah sestává z nakreslení uzavřené křivky procházející minimálně jednou tečkou a neprotínající[3] jiné křivky ani sama sebe. Jednou tečkou může procházet nejvýše jedna křivka. Hráči se střídají v tazích, kdo nemůže táhnout, prohrál.

Pomozte Viktorovi a určete, které pozice jsou vyhrávající a které prohrávající.

(Alča Skálová)

[2] Symbolem $a \mid b$ rozumíme „a dělí b“

[3] Dotyk křivek taktéž není povolen.

Řešení:

Hru si můžeme přeformulovat do následující podoby: Je dáno několik hromádek sirek (počtu sirek v jedné hromádce odpovídá počet teček v jedné souvislé oblasti), ve svém tahu hráč musí odebrat z jedné hromádky alespoň jednu sirku (vytvořená křivka prochází alespoň jednou tečkou) a pokud chce, může zbylé sirky rozdělit na dvě nové hromádky (část teček novou křivkou oddělí od zbývajících). Kdo nemůže táhnout, prohrál.

Prvně si uvědomme, že Nim-součet dvou čísel je vždycky menší nebo roven jejich klasickému součtu (v klasickém součtu se totiž nic „neztrácí“ – v případě součtu dvou jedniček jejich hodnotu přeneseme do dalšího řádu).

Dokažme, že prohrávající pozice jsou ty, pro které je Nim-součet velikostí jednotlivých hromádek nulový, a vyhrávající ty, pro které je nenulový. K tomu potřebujeme ověřit:

(i) Je-li Nim-součet nulový, nelze táhnout do pozice s nulovým Nim-součtem. Vskutku, mějme pozici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$. Rozdělíme-li búno[4] první hromádku na dvě nezáporné o velikostech y, z, je $y + z < x_1$ a z výše zmíněného pozorování plyne $y \oplus z < x_1$. Aby měla nová pozice nulový Nim-součet, muselo by platit $y \oplus z \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$, pak by ovšem z Pravidla krácení plynulo $y \oplus z = x_1$, což je spor.

(ii) Je-li Nim součet nenulový, lze táhnout do pozice s nulovým Nim-součtem. To už je jednoduché. Nevyužijeme možnosti rozdělit hromádku na dvě a provedeme tah jako v klasickém Nimu – ze seriálu víme, že požadovaný tah existuje.

Vyhrávající pozice jsou tedy právě ty, pro něž je Nim-součet počtu teček v jednotlivých oblastech roviny nenulový.

Poznámky:

Kromě postupů podobných vzorovému se ve vašich řešeních objevila ještě varianta využívající SG funkci – klíčovými kroky bylo opět rozpoznat v úloze Nim s pozměněnými pravidly, uvědomit si nerovnost mezi klasickým a Nim-součtem a ověřit, že tipnutá funkce skutečně splňuje vlastnosti, které činí SG funkci SG funkcí.

Část z vás se ve svém řešení ještě snažila vysvětlit, proč uzavřená křivka dělí rovinu na dvě části, a tedy několik křivek na několik částí. Tento důkaz nebyl zamýšlenou součástí řešení. Ačkoliv je totiž intuitivně zřejmé, že „hezká“ uzavřená křivka rozdělí rovinu na „vnějšek“ a „vnitřek“, důkaz je těžký (troufám si tvrdit, že téměř nikdo z organizátorů PraSátka se s ním na vysoké ještě nesetkal). Není se tedy co divit, že nikomu z vás se správný důkaz Jordanovy věty (tak se onomu tvrzení říká) nepodařil. Tyto pokusy jsem samozřejmě nijak bodově nehodnotila, ale je chvályhodné, že jste si uvědomili, že všechna „zřejmá“ fakta nemusí být zřejmá. (-:

(Alča Skálová)

[4] Búno = bez újmy na obecnosti. Oblíbená matematická zkratka. (-: